This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3028.95

BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)
26 July, 1895.

SCIENCE CENTER LIBRARY

6726

Aufgaben

zur

Differential- und Integralrechnung

nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen.

Von

Dr. H. Dölp

weiland Professor am Polytechnikum zu Darmstadt.

Sechste, verbesserte Auflage.

Giessen.

J. Ricker'sche Buchhandlung.

1895.

VI, 8450
Math 3028.15

HARVARD COLLEGE
JUL 20 1895
LIBRARY

Bowditch fund.

Alle Rechte vorbehalten.

INHALT

Differentialrechnung.

Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

		Seite.
§ 1.	Zusammenstellung der Differentialquotienten der einfachen Funktionen	1
§ 2.	Erklärung der Funktion einer unabhängigen Variabelen. Erklärung und Entwicklung des Differentialquotienten	2
§ 3.	Aufgaben zur Differentiation algebraischer Funktionen	18
§ 4.	Die Differentialquotienten der trigonometrischen und cyklometrischen Funktionen	22
§ 5.	Exponential- und logarithmische Funktionen	28
§ 6.	Unentwickelte Funktionen	37
§ 7.	Funktionen von der Form: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$	42
§ 8.	Differentialquotienten höherer Ordnung	45
§ 9.	Anwendung der Differentialrechnung zur Ermittlung der Werthe unbestimmter Formen	53
§ 10.	Maxima und Minima der Funktionen	61
§ 11.	Die Reihen von Taylor und Maclaurin	86

Funktionen von zwei unabhängigen Variabelen.

§ 12.	Entwicklung der Differentialquotienten	95
§ 13.	Maxima und Minima von Funktionen mit zwei unabhängigen Variabelen	97
§ 14.	Homogene Funktionen	100
§ 15.	Die Reihen von Taylor und Maclaurin für Funktionen mit zwei unabhängigen Variabelen	101

Integralrechnung.

Unbestimmte Integrale.

§ 1.	Die einfachen Integralformen	104
§ 2.	Integration rationaler algebraischer Brüche	110
§ 3.	Reductionsformeln	133
§ 4.	Irrationale algebraische Funktionen	135

Seite.

§ 5. Exponential- und logarithmische Funktionen 150
§ 6. Trigonometrische und cyklometrische Funktionen 153

Bestimmte Integrale 163

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

§ 1. Tangente und Normale ebener Curven 174
§ 2. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte (Spitzen), conjugirte (isolirte) Punkte 180
§ 3. Krümmungskreis und Evolute 185
§ 4. Die Wende- oder Inflexionspunkte 194
§ 5. Der Flächeninhalt begrenzter Figuren 198
§ 6. Rectification ebener Curven 204
§ 7. Die Oberfläche von Rotationskörpern 206
§ 8. Der Cubikinhalt von Rotationskörpern 208

Differentialrechnung.

Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

§ 1. Zusammenstellung der Differentialquotienten der einfachen Funktionen.

$y = a x^n$	$\frac{dy}{dx} = n a x^{n-1}$
$y = \frac{a}{x^n} = a x^{-n}$	$= -\frac{n a}{x^{n+1}} = -n a x^{-n-1}$
$y = a\sqrt[n]{x} = a x^{\frac{1}{n}}$	$= \frac{a}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n} . a . x^{\frac{1}{n}-1}$
$y = a\sqrt[n]{x^p} = a x^{\frac{p}{n}}$	$= \frac{p}{n} . a\sqrt[n]{x^{p-n}} = \frac{p}{n} . a x^{\frac{p}{n}-1}$
$y = \sqrt{x}$	$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = e^x$	$= e^x$
$y = a^x$	$= a^x \lg a$
$y = \lg x$	$= \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$= \cos x$
$y = \cos x$	$= -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$= \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$= -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \operatorname{arc}\sin x$	$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \text{arc cos } x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \text{arc tg } x$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{1+x^2}$

$y = \text{arc cotg } x$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{1+x^2}$.

§. 2. Erklärung der Funktion einer unabhängigen Variabelen. Erklärung und Entwicklung des Differentialquotienten.

Wenn in einer einzigen Gleichung eine einzige unbestimmte Grösse x mit einer beliebigen Anzahl von gegebenen und unverändert beibehaltenen (constanten) Grössen a, b, c u. s. w. durch irgend welche Rechnungs-Operationen verbunden auftritt, so hat man die unbestimmte Grösse x als Unbekannte anzusehen. Es ist Aufgabe der Theorie der Gleichungen, denjenigen Werth oder diejenigen einzelnen Werthe ausfindig zu machen, welche für x eingesetzt die vorgelegte Gleichung identisch erfüllen.

Wenn dagegen eine einzige Gleichung ausser den gegebenen Constanten zwei unbestimmte Grössen x und y enthält, so sind diese als veränderliche Grössen (als Variabele) zu betrachten. Und zwar darf man der einen unbestimmten Grösse einen beliebigen Werth beilegen und sie von da aus in irgend einer Weise zu immer andern Werthen überführen. Sie ist eine unabhängige Variabele. Die andere unbestimmte Grösse nimmt dabei im allgemeinen auch immer andere Werthe an, jedoch so, dafs in jedem Stadium der Veränderung die vorgelegte Gleichung erfüllt ist. Die zweite unbestimmte Grösse wird desshalb eine abhängige Variabele genannt.

Welche von den beiden unbestimmten Grössen man als unabhängig ansehen will, ist von vorn herein der freien Wahl überlassen. Hat man sich für eine von ihnen entschieden, so ist die andere die abhängige Variabele. Man nennt dieselbe auch eine Funktion der unabhängigen Variabelen.

1. Beispiel: $Ax + By + C = 0$,

folglich $y = -\frac{Ax + C}{B}$,

oder auch $x = -\frac{By + C}{A}$.

2. Beispiel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$,

folglich $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

oder auch $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$.

Der Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variabelen und ihrer Funktion lässt sich am einfachsten beurtheilen, wenn ein analytischer Ausdruck, der ausser den constanten Grössen nur die unabhängige Variabele enthält, gleich der abhängigen Variabelen gesetzt wird. Z. B.:

$$y = a(a + bx + cx^2)^n; \quad y = \sqrt{a + bx}; \quad y = e^{ax}; \quad y = a^x;$$
$$y = \lg(a + bx); \quad y = a \sin x + b \cos x; \quad y = \operatorname{tg} x.$$

In diesem Falle sagt man: y ist explicite als Funktion von x gegeben, oder, was dasselbe bedeutet: y ist eine entwickelte Funktion von x. Symbole wie die folgenden:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x) \text{ u. s. w.}$$

dienen zur allgemeinen Bezeichnung solcher Funktionen; die mit x verbundenen Constanten sind hier nicht besonders hervorgehoben. Es ist eine Eigenthümlichkeit vieler Funktionen, dass jedem beliebigen Werth von x auch nur ein einziger Werth von y entspricht, wie in $y = x^2$, $y = \sin x$; doch gibt es auch solche, die zu jedem Werth von x mehr als einen Werth von y liefern, wie $y = \sqrt{x}$. Hiernach werden ein- und mehrwerthige Funktionen unterschieden.

Substituirt man in einer entwickelten Funktion $y = f(x)$ an Stelle der unabhängigen Variabelen x die beiden verschiedenen Werthe x und x_1, so ergeben sich die entsprechenden Funktionswerthe $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1)$, und man kann aus beiden Werthpaaren den folgenden Differenzenquotienten zusammensetzen:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}. \qquad (1)$$

Da wir die Funktion f als gegeben voraussetzen, so kann in jedem einzelnen Falle dieser Quotient auch ausgerechnet werden.

1. Beispiel: $y = ax^2$, $y_1 = ax_1^2$,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a(x_1^2 - x^2)}{x_1 - x} = a(x_1 + x).$$

2. Beispiel: $y = \sqrt{x}$, $y_1 = \sqrt{x_1}$,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}}.$$

Halten wir nun in (1) das Werthpaar x, y unverändert fest, ändern dagegen den Werth x_1 in der Art, daſs er sich dem Werth von x mehr und mehr nähert, so wird auch y_1 andere und andere Werthe annehmen und es wird im allgemeinen — d. h. abgesehen von gewissen Ausnahmefällen — die Differenz $y_1 - y$ in dem Augenblick zu Null, in welchem $x_1 = x$ geworden ist. Trifft dies zu unabhängig von der Art und Weise, wie man x_1 in x übergeführt hat, so heisst die Funktion y für den betrachteten Werth von x stetig variabel. In diesem Falle nimmt für $x_1 = x$ der unter (1) angeführte Differenzenquotient die Form $\frac{0}{0}$ an und heisst Differentialquotient. Dass derselbe trotz der eigenthümlichen Form doch einen ganz bestimmten und von der Art der Funktion abhängigen Werth besitzt, zeigen uns schon die angeführten Beispiele, indem für $x_1 = x$ der eine Differenzenquotient in $2ax$, der andere in $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ übergeht. Dieses Kleinerwerden der beiden Differenzen $(x_1 - x)$ und $(y_1 - y)$ in dem Quotienten (1), fortgesetzt bis zu ihrem gänzlichen gleichzeitigen Verschwinden, wird als Uebergang zu den Grenzwerthen oder Grenzen bezeichnet und durch das vorgesetzte Zeichen lim (limes, Grenze) angezeigt, der hiedurch aus dem Differenzenquotienten hervorgehende Differentialquotient

wird durch das Symbol $\frac{dy}{dx}$ dargestellt und durch folgende Gleichung definirt:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Man bezeichnet den Differentialquotienten auch mit $f'(x)$ oder mit y'.

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x), \quad \text{wenn } y = f(x).$$

Man kann bei der Annäherung an die Grenze verschiedene auf einander folgende Stationen ins Auge fassen und den Uebergang aus einer Station in die nächstfolgende als einen Schritt bezeichnen. Dann ist zu unterscheiden, ob der Uebergang zur Grenze so bewerkstelligt wird, dass dieselbe nach einer endlichen Anzahl von Schritten wirklich erreicht wird, oder in solcher Weise, dass zur wirklichen Erreichung eine unendlich grosse Anzahl von Schritten erforderlich sein würde. Bleibt man in diesem zweiten Falle nach einer endlichen Anzahl von Schritten stehen, so ist die Differenz $x_1 - x$ immer noch endlich. Man kann sich aber von da aus in eine solche Station versetzt denken, die noch nicht völlig mit der Grenze zusammenfällt, in die man aber nur durch Ueberspringung von unendlich vielen Zwischenstationen gelangen würde. Hier ist die Differenz bereits so klein geworden, dass sie mit endlichem Mass nicht mehr gemessen werden kann. Diese verschwindend kleine Differenz nennt man das Differential von x und bezeichnet es durch dx. Da nun bei einer stetigen Funktion die andere Differenz $(y_1 - y)$ mit der vorhergehenden gleichzeitig verschwindet, so wird auch sie in dem Augenblick verschwindend klein sein, wo $(x_1 - x)$ bereits zu dx geworden ist. Dieser verschwindend kleine und dem dx entsprechende Werth von $(y_1 - y)$ wird das Differential von y genannt und durch dy bezeichnet. Obgleich hiernach die beiden angeführten Differentiale als verschwindend kleine Grössen angesehen werden müssen, so sind sie doch keineswegs einander gleich, weil sie der Bedingung zu genügen haben:

$y + dy = f(x + dx)$, wenn zugleich $y = f(x)$ ist. Der Quotient beider Differentiale ist der Differentialquotient der Funktion.

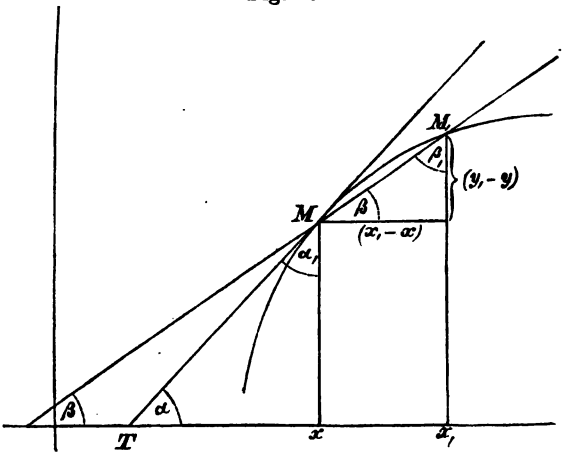
Die letzte Methode, den Differentialquotienten aus dem Differenzenquotienten hervorgehen zu lassen, lässt sich auch graphisch veranschaulichen. Man substituirt zu dem Zweck in $y = f(x)$ für die Variabele x nach einander die Werthe x, x_1, x_2, x_3 u. s. w. und gewinnt so aus der Gleichung die entsprechenden Werthe y, y_1, y_2, y_3 u. s. w. Diese Werthpaare dienen jetzt dazu, um bei Annahme rechtwinkeliger Achsen nach den Regeln der analytischen Geometrie eine Reihe von Punkten M, M_1, M_2, M_3 u. s. w. zu construiren, indem die x-Werthe als Abscissen und die y-Werthe als Ordinaten aufgetragen werden. Rücken hierbei die Substitutionswerthe für x so nahe zusammen, dass ihre Unterschiede zu einem Differentiale werden, indem $x_1 = x + dx$, $x_2 = x_1 + dx = x + 2dx$, $x_3 = x_2 + dx = x + 3dx$ u. s. w. wird, so sind bei einer stetigen Funktion auch die Differenzen der y-Werthe verschwindend kleine Grössen oder Differentiale der y, die jedoch unter einander nicht gleich sind, wie dies bei den Differentialen von x der Fall ist. Wir setzen deshalb $y_1 = y + dy$, $y_2 = y_1 + dy_1$, $y_3 = y_2 + dy_2$ u. s. w. Zugleich treten die Punkte M, M_1, M_2, M_3 u. s. w. so nahe zusammen, dass die verschwindend kleinen geraden Verbindungslinien als die Elemente einer stetigen Curve angesehen werden dürfen, welche Funktionscurve genannt wird. Die Funktionscurve ist hiernach durch die wichtige Eigenschaft ausgezeichnet, dass Abscisse und Ordinate eines jeden Punktes durch ihre Masszahlen die zugehörige Gleichung $y = f(x)$ befriedigen.

Legen wir nun durch die beiden benachbarten aber noch nicht unendlich nahe gelegenen Punkte M und M_1 einer solchen Funktionscurve eine Sekante, so ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Rückt jetzt M_1 längs des Bogens dem Punkte M immer näher, so werden die Differenzen $(x_1 - x)$ und $(y_1 - y)$ in dem Augenblick zu ihren Differentialen dx und dy, wo M_1 unmessbar

Fig. 1.



nahe bei M angelangt, die Sehne MM_1 in ein Curvenelement, die Sekante in eine Tangente und β in α übergegangen ist. Dieser besonderen Lage des Punktes M_1 neben M entsprechen die Coordinaten $x + dx$, $y + dx$ und es ist jetzt

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x). \qquad (2)$$

In Worten lässt sich der Sinn dieser Formel so ausdrücken: Legt man bei rechtwinkeligen Coordinatenachsen durch irgend einen Punkt der Funktionscurve eine Tangente, so stellt der Differentialquotient der Funktion, wenn wir unter x die Abscisse des Berührungspunktes verstehen, die trigonometrische Tangente des Winkels vor, welchen die geometrische Tangente mit der x-Achse bildet.

Nach diesen vorbereitenden Erörterungen ist es uns möglich geworden, die Formeln zu entwickeln, nach welchen aus den einzelnen Funktionsformen der zugehörige Differentialquotient abgeleitet werden kann, und beginnen wir mit

$$y = f(x) = ax^n, \ (n \text{ ganz und positiv}).$$

Den Werthen x und x_1 entsprechen die Funktionswerthe $y = ax^n$, $y_1 = ax_1^n$ und daraus entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \lim a\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right) = \lim a\,(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots . x^{n-1}),$$

wenn man vor dem Uebergang zur Grenze die Division ausführt, um die Form $\frac{0}{0}$ zu umgehen. Wird nun $x_1 = x$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}. \qquad (3)$$

Wird $n = 0$, so ist $y = a$, d. h. eine Constante, und daher auch $y_1 = a$. Die Differenz $(y_1 - y)$ ist mithin gleich Null und wenn man sie durch $(x_1 - x)$ dividirt, so ist auch der Quotient gleich Null und bleibt es selbst beim Uebergange zur Grenze. Es ist mithin für:

$$y = a = \text{Constante} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Der Differentialquotient einer Constanten ist gleich Null.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich auch an der Funktionscurve nachweisen. Da dieselbe für $y = a$ in eine zur x-Achse parallele gerade Linie übergeht, deren Tangente in allen Punkten mit ihr selbst zusammenfällt, so ist $\alpha = 0$ und daher auch $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

Zunächst wollen wir jetzt nachweisen, dass Formel (3) auch noch dann anwendbar ist, wenn n eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl ist. Wir setzen:

$$y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}, \ (n \text{ ganz und positiv}).$$

Den beiden Werthen x und x_1 der unabhängigen Variabelen entsprechen die Funktionswerthe: $y = ax^{-n}$ und $y_1 = ax_1^{-n}$, und daraus entsteht:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a\left(\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x^n}\right)}{x_1 - x} = \frac{-a}{x_1^n x^n} \cdot \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Damit nun dieser Werth beim Uebergang zur Grenze, d. h. für $x_1 = x$, nicht die Form $\frac{0}{0}$ annehme, führen wir vorher die Division aus und finden:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{-a}{x_1^n x^n}(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots\ldots + x^{n-1}),$$

und daraus für $x_1 - x$:

$$\frac{dy}{dx} = -n \cdot ax^{-n-1}.$$

Die umgekehrte Funktion. Zu jeder Funktion $y = f(x)$ ist eine andere $x = \varphi(y)$ denkbar, die so beschaffen ist, dass jedes Werthpaar (x, y), welches die eine Gleichung befriedigt, auch der anderen Genüge leistet. Man nennt dann die eine Funktion die Umkehrung der anderen, und es mögen wiederum x, y und x_1, y_1 zwei Werthpaare sein, die beiden genügen. Dann ist

$$y = f(x) \qquad x = \varphi(y)$$
$$y_1 = f(x_1) \qquad x_1 = \varphi(y_1)$$

und die folgende Formel:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = 1$$

identisch richtig, und sie bleibt auch richtig, wenn man zu den Grenzwerthen übergeht. So erhält man:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1, \qquad (4)$$

d. h. in Worten: Ist eine Funktion die Umkehrung einer anderen, so ist das Produkt aus ihren beiden Differentialquotienten gleich der Einheit.

Auch die Funktionscurve lässt die Richtigkeit dieser Formel leicht erkennen, indem die Relation

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\beta_1 = 1$$

sich beim Uebergang zur Grenze in die andere verwandelt:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha_1 = 1.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann jetzt nachgewiesen werden, dafs die Funktion

$$y = a\sqrt[n]{x} = ax^{\frac{1}{n}}$$

ebenfalls nach Formel (3) differentiirt werden kann. Der umgekehrten Funktion $x = \frac{y^n}{a^n}$ entspricht nämlich der Differentialquotient

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ny^{n-1}}{a^n} = \frac{n\left(ax^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}{a^n} = \frac{nx^{1-\frac{1}{n}}}{a},$$

und daraus geht durch abermalige Umkehrung nach Formel (4) der gesuchte Differentialquotient hervor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \cdot ax^{\frac{1}{n}-1}.$$

Ist speciell $y = \sqrt{x}$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Eine Funktion von einer Funktion. Wenn y eine Funktion von z ist, wie $y = f(z)$, und z selbst wieder eine Funktion von x ist, wie $z = \varphi(x)$, so muss selbstverständlich y eine Funktion von x sein, welche durch Substitution von z in der Form $y = f[\varphi(x)]$ erhalten wird. Dass aber zur Ableitung des Differentialquotienten die angezeigte Substitution nicht unbedingt nöthig ist, soll nun gezeigt werden. Den Werthen x und x_1 der unabhängigen Variabelen entsprechen die Funktionswerthe:

$$z = \varphi(x) \qquad z_1 = \varphi(x_1)$$
$$y = f(z) \qquad y_1 = f(z_1),$$

und aus diesen bildet sich leicht die nachfolgende Identität:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{z_1 - z} \cdot \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

Durch Uebergang zu den Grenzen geht daraus eine wichtige Relation zwischen den Differentialquotienten hervor, welche heisst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \qquad (5)$$

Ist y eine Funktion von z, und z selbst eine Funktion von x, so ist der Differentialquotient von y nach x gleich dem Produkt aus dem Differentialquotienten von y nach z mit dem Differentialquotienten von z nach x.

Beispiel: $y=(ax)^2=z^2$, wenn $z=ax$;

$$\frac{dy}{dz}=2z,\quad \frac{dz}{dx}=a,\quad \frac{dy}{dx}=2z\,.\,a=2a^2x.$$

Aus $y=a^2x^2$ erhält man den nämlichen Werth.

Die Formel (5) erweitert sich dadurch, dass wir annehmen, es sei:

$$y=f(u),\quad u=\varphi(z),\quad z=\varrho(x),$$

indem alsdann:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

So ist es endlich möglich geworden, die Anwendbarkeit der Formel (3) auch für den Fall nachzuweisen, dass der Exponent ein Bruch und die Funktion von der Form ist:

$$y=a\sqrt[n]{x^p}=ax^{\frac{p}{n}}.$$

Durch die Substitution $z=x^p$ wird nämlich:

$$y=az^{\frac{1}{n}},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{n}\cdot az^{\frac{1}{n}-1},\quad \frac{dz}{dx}=px^{p-1}$$

und daraus:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{n}\cdot a(x^p)^{\frac{1}{n}-1}\cdot px^{p-1}=\frac{p}{n}\cdot ax^{\frac{p}{n}-1}.$$

Hiermit ist die Gültigkeit der Formel (3) für alle möglichen Formen des Exponenten nachgewiesen, und wir können ihren Sinn so aussprechen:

Eine Potenz der Variabelen wird differentiirt, indem man ihren Koefficienten mit dem Exponenten multiplicirt und diesen selbst um die Einheit vermindert.

1. Beispiel: $f(x)=4x^3$, $f'(x)=12x^2$.
2. „ „ $=2x^{-3}$, „ $=-6x^{-4}$.
3. „ „ $=4x^{\frac{3}{2}}$, „ $=6x^{\frac{1}{2}}$.
4. „ „ $=2x^{-\frac{1}{2}}$, „ $=-x^{-\frac{3}{2}}$.

Die zusammengesetzten Funktionen. Werden mehrere einfache Funktionen, wie sie in der am Anfang aufgestellten Tabelle enthalten sind, durch irgend welche Rechnungs-Operationen mit einander verbunden, so heisst eine solche Verbindung

eine zusammengesetzte Funktion. Sind zwei derartige Funktionen, wie $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, zur Summe $y = u + v$ verbunden, so erhält man für die zwei besonderen Werthe x und x_1 der unabhängigen Variabelen die entsprechenden Funktionswerthe:

$$\begin{array}{lll} u = \varphi(x) & v = \psi(x) & y = u + v \\ u_1 = \varphi(x_1) & v_1 = \psi(x_1) & y_1 = u_1 + v_1 \end{array}$$

und daraus die Quotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{(u_1 + v_1) - (u + v)}{x_1 - x} = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{v_1 - v}{x_1 - x},$$

woraus dann wieder beim Uebergang zu den Grenzen die Formel hervorgeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \qquad (6)$$

Zur Erweiterung haben wir darin nur $v + w$ statt v, und $\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$ statt $\frac{dv}{dx}$ zu setzen; für $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$, $y = u + v + w$ finden wir alsdann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx},$$

oder in anderer Schreibweise: $y' = u' + v' + w'$.

Der Differentialquotient einer Summe von Funktionen der nämlichen Variabelen ist gleich der Summe aus den Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

Ist unter gleichen Voraussetzungen $y = u - v$, so ist $u = y + v$; $u' = y' + v'$, und $y' = u' - v'$.

Für das Produkt der beiden Funktionen u und v ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{lll} u = \varphi(x) & v = \psi(x) & y = u \,.\, v \\ u_1 = \varphi(x_1) & v_1 = \psi(x_1) & y_1 = u_1 \,.\, v_1 \end{array}$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 v_1 - uv}{x_1 - x} = \frac{u_1 v_1 - u v_1 + u v_1 - uv}{x_1 - x}$$

$$= v_1 \,.\, \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \,.\, \frac{v_1 - v}{x_1 - x}.$$

Beim Uebergang zu den Grenzen wird auch v_1 zu v, und man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}, \text{ oder: } y' = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

In Worten heisst dies: Ein Produkt aus zwei Funktionen der nämlichen Variabelen wird differentiirt, indem man den Differentialquotienten des ersten Factors mit dem zweiten, und den Differentialquotienten des zweiten Factors mit dem ersten Factor multiplicirt und beide Produkte addirt.

1. Beispiel: $y = x^3 \cdot x^4 = u \cdot v$; $u' = 3x^2$, $v' = 4x^3$, $y' = x^4 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 4x^3 = 7x^6$, ein Werth, welcher auch aus der anderen Form $y = x^7$ hervorgeht.

2. Beispiel: $y = (a + bx^2) \cdot (c + ex^3) = u \cdot v$; $u' = 2bx$, $v' = 3ex^2$; $y' = 2bx(c + ex^3) + 3ex^2(a + bx^2) = 2bcx + 3aex^2 + 5bex^4$. Das gleiche Resultat wird erhalten, wenn man zuerst die Multiplication ausführt und dann differentiirt.

Geht v über in $v \cdot w$, so verwandelt sich auch v' in $v' \cdot w + w' \cdot v$, und wir erhalten:

$$y = u \cdot v \cdot w, \quad y' = vw \cdot u' + uw \cdot v' + uv \cdot w'.$$

Tritt an Stelle des veränderlichen Factors v die Constante a, so ist $\frac{dv}{dx} = 0$ und daher für $y = a \cdot u$, $\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{du}{dx}$.

Der Differentialquotient eines Produktes aus einer Constanten mit einer Funktion von x ist gleich dem Produkt aus dieser Constanten mit dem Differentialquotienten der Funktion.

Dem Quotienten $y = \frac{u}{v}$ entsprechen, wenn $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ ist, für die Werthe x und x_1 die Funktionswerthe: $y = \frac{u}{v}$, $y_1 = \frac{u_1}{v_1}$ sowie der Differenzenquotient:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v}}{x_1 - x} = \frac{1}{vv_1} \cdot \frac{u_1 v - uv + uv - uv_1}{x_1 - x}$$

$$= \frac{1}{vv_1}\left(v \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} - u \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x}\right).$$

Der Uebergang zu den Grenzwerthen wandelt diese Formel in die nachfolgende um:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{v \,.\, u' - u \,.\, v'}{v^2}. \qquad (7)$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist gleich dem Differentialquotienten des Zählers multiplicirt mit dem Nenner, weniger dem Differentialquotienten des Nenners multiplicirt mit dem Zähler, das Ganze getheilt durch das Quadrat des Nenners.

Beispiel: $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{u}{v}$; $u' = 2x$, $v' = 1$,

$$y' = \frac{2x(x-a) - (x^2 - a^2)}{(x-a)^2} = 1.$$

Aus der reducirten Form $y = x + a$ entsteht der nämliche Werth.

Einfacher könnte der Differentialquotient eines Quotienten aus demjenigen des Produktes abgeleitet werden. Ist nämlich

$$y = \frac{u}{v}, \text{ so ist } u = y \,.\, v; \quad u' = v \,.\, y' + y \,.\, v';$$

$$y' = \frac{u' - y \,.\, v'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \,.\, v'}{v} = \frac{v \,.\, u' - u \,.\, v'}{v^2}.$$

Alle bisher bezüglich der zusammengesetzten Funktionen aufgestellten Formeln sind als besondere Fälle einer allgemeinen anzusehen, die jetzt entwickelt werden soll. Es mag wieder sein: $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $y = f(u, v)$, dann entsprechen den Werthen x und x_1 die Funktionswerthe:

$$\begin{array}{lll} u = \varphi(x) & v = \psi(x) & y = f(u, v) \\ u_1 = \varphi(x_1) & v_1 = \psi(x_1) & y_1 = f(u_1, v_1), \end{array}$$

und diesen der Differenzenquotient:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v)}{x_1 - x},$$

aus welchem durch Uebergang zur Grenze der Differentialquotient hervorgeht. Bevor dieser aber ausgeführt werden kann, ist eine Umformung des Ausdrucks nothwendig, und daher setzen wir:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1) + f(u, v_1) - f(u, v)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{f(u, v_1) - f(u, v)}{v_1 - v} \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x}.$$

Um nun den Einfluss etwas eingehender zu prüfen, den eine Constante a auf den Werth des Differentialquotienten äussert, wählen wir für die Funktion die Form: $y = f(x, a)$, legen der Variabelen x die bestimmten Werthe x und x_1 bei und finden die zugehörigen Funktionswerthe: $y = f(x, a)$, $y_1 = f(x_1, a)$, aus denen wir dann den Differenzenquotienten zusammenstellen:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1, a) - f(x, a)}{x_1 - x}.$$

Lassen wir darin x_1 in x übergehen, so bleibt die Constante a unverändert und besitzt im Differentialquotienten den gleichen Werth wie in der Funktion. Liegt nun irgend ein Grund vor, die Constante a der Funktion im Differentialquotienten durch eine andere Constante b zu ersetzen, so kann dies auch schon vor der Differentiation geschehen, weil eben bei dieser Ableitung die Constante, sofern dieselbe nicht ganz herausfällt, ihren Werth nicht verändert. An dem Quotienten $\frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1)}{u_1 - u}$ ist die Grösse v_1 genau wie eine Constante betheiligt, indem sie in den beiden Theilen des Zählers gleichwerthig auftritt. Geht nun x_1 über in x, so verändert sich zwar auch v_1, doch besitzt es stets in den beiden Theilen des Zählers ganz gleichen Werth, bis es endlich zu v geworden ist. Darum ist es auch erlaubt, statt des vorstehenden den nachfolgenden Quotienten zur Grenze überzuführen:

$$\frac{f(u_1, v) - f(u, v)}{u_1 - u}.$$

Geschieht dies, so erhalten wir den Differentialquotienten der Funktion f so genommen, als ob nur u variabel, v dagegen constant sei. Der so gebildete Differentialquotient wird der partielle Differentialquotient der Funktion nach der Variabelen u genannt und durch ein rundes ∂ von dem totalen

Differentialquotienten unterschieden, also durch $\frac{\partial f}{\partial x}$ oder durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet. Dass sich der Quotient $\frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{x_1 - x}$ auf die nämliche Weise beim Uebergang zur Grenze in den partiellen Differentialquotienten der Funktion nach der Variabelen x verwandelt, bedarf hiernach keiner weiteren Erläuterung mehr, und wir setzen denselben gleich $\frac{\partial f}{\partial x}$. Die anderen Differenzenquotienten unseres obigen Ausdrucks werden ebenfalls zu Differentialquotienten, und die Gleichung gewinnt so beim Uebergang zur Grenze die folgende Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \qquad (8)$$

Sind u und v Funktionen von x, und ist y eine Funktion von u und v, so differentiirt man diese Funktion partiell nach u und nach v, dann u und v selbst total nach x und setzt aus diesen Differentialquotienten denjenigen von y nach x nach der vorstehenden Formel zusammen.

1. Beispiel: Sind u und v zu einer Summe verbunden, so ist speciell $y = f(u, v) = u + v$, $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = 1$, und $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{du}{dx} + 1 \cdot \frac{dv}{dx}$.

2. Beispiel: Bilden u und v eine Differenz, so ist $y = f(u, v) = u - v$, und $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$.

3. Beispiel: Der Vereinigung von u und v zu einem Produkt entspricht die besondere Form: $y = f(u, v) = u \cdot v$; $\frac{\partial f}{\partial u} = v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = u$, $\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$.

4. Beispiel: Ist endlich $y = f(u, v) = \frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v^{-1},\ \frac{\partial f}{\partial v} = -uv^{-2},\ \frac{dy}{dx} = v^{-1}\cdot\frac{du}{dx} - uv^{-2}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

5. Beispiel: Wenn y eine Funktion nur von u ist, indem die andere Variabele v ganz fehlt, so fällt in (8) einmal der zweite Theil fort, ferner ist $\frac{\partial f}{\partial u}$ gleichbedeutend mit $\frac{df}{du}$ oder $\frac{dy}{du}$. Für die Funktionsform $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, finden wir dann: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, oder die Formel (5).

Es erübrigt uns jetzt noch zu zeigen, auf welche Weise Formel (8) erweitert werden kann. Aus den drei Funktionen von x, nämlich $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$ setzen wir die Funktion $y = f(u, v, w)$ zusammen, legen der unabhängigen Variabelen x die Werthe x und x_1 bei, bilden die entsprechenden Funktionswerthe:

$$u = \varphi(x),\quad v = \psi(x),\quad w = \varrho(x),\quad y = f(u, v, w),$$
$$u_1 = \varphi(x_1),\quad v_1 = \psi(x_1),\quad w_1 = \varrho(x_1),\quad y_1 = f(u_1, v_1, w_1),$$

und daraus den Differenzenquotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1, w_1) - f(u, v, w)}{x_1 - x}.$$

Um diesen Quotienten für den Uebergang zur Grenze geeignet umzuformen, fügen wir die Funktionswerthe $f(u, v_1, w_1)$ und $f(u, v, w_1)$ im Zähler positiv und negativ zu, multipliciren und dividiren einzelne Theile mit $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$ und erhalten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1, w_1) - f(u, v_1, w_1)}{u_1 - u}\cdot\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$
$$+\frac{f(u, v_1, w_1) - f(u, v, w_1)}{v_1 - v}\cdot\frac{v_1 - v}{x_1 - x} + \frac{f(u, v, w_1) - f(u, v, w)}{w_1 - w}\cdot\frac{w_1 - w}{x_1 - x}.$$

Geht jetzt x_1 über in x, so verschwinden zugleich die Differenzen: $(y_1 - y)$, $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$ und die 3 aus Differenzen der Funktionswerthe bestehenden Zähler, und damit werden die

Differentialquotienten unterschieden, also durch $\frac{\partial f}{\partial u}$ oder durch $\frac{\partial y}{\partial u}$ bezeichnet. Dass sich der Quotient $\frac{f(u, v_1) - f(u, v)}{v_1 - v}$ auf die nämliche Weise beim Uebergang zur Grenze in den partiellen Differentialquotienten der Funktion nach der Variabelen v verwandelt, bedarf hiernach keiner weiteren Erläuterung mehr, und wir setzen denselben gleich $\frac{\partial f}{\partial v}$. Die anderen Differenzenquotienten unseres obigen Ausdrucks werden ebenfalls zu Differentialquotienten, und die Gleichung gewinnt so beim Uebergang zur Grenze die folgende Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{8}$$

Sind u und v Funktionen von x, und ist y eine Funktion von u und v, so differentiirt man diese Funktion partiell nach u und nach v, dann u und v selbst total nach x und setzt aus diesen Differentialquotienten denjenigen von y nach x nach der vorstehenden Formel zusammen.

1. Beispiel: Sind u und v zu einer Summe verbunden, so ist speciell $y = f(u, v) = u + v$, $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = 1$, und $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{du}{dx} + 1 \cdot \frac{dv}{dx}$.

2. Beispiel: Bilden u und v eine Differenz, so ist $y = f(u, v) = u - v$, und $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$.

3. Beispiel: Der Vereinigung von u und v zu einem Produkt entspricht die besondere Form: $y = f(u, v) = u \,.\, v$; $\frac{\partial f}{\partial u} = v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = u$, $\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$.

4. Beispiel: Ist endlich $y = f(u, v) = \frac{u}{v} = u \,.\, v^{-1}$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v^{-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -uv^{-2}, \quad \frac{dy}{dx} = v^{-1} \cdot \frac{du}{dx} - uv^{-2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

5. Beispiel: Wenn y eine Funktion nur von u ist, indem die andere Variabele v ganz fehlt, so fällt in (8) einmal der zweite Theil fort, ferner ist $\frac{\partial f}{\partial u}$ gleichbedeutend mit $\frac{df}{du}$ oder $\frac{dy}{du}$. Für die Funktionsform $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, finden wir dann: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, oder die Formel (5).

Es erübrigt uns jetzt noch zu zeigen, auf welche Weise Formel (8) erweitert werden kann. Aus den drei Funktionen von x, nämlich $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$ setzen wir die Funktion $y = f(u, v, w)$ zusammen, legen der unabhängigen Variabelen x die Werthe x und x_1 bei, bilden die entsprechenden Funktionswerthe:

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x), \quad w = \varrho(x), \quad y = f(u, v, w),$$
$$u_1 = \varphi(x_1), \quad v_1 = \psi(x_1), \quad w_1 = \varrho(x_1), \quad y_1 = f(u_1, v_1, w_1),$$

und daraus den Differenzenquotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1, w_1) - f(u, v, w)}{x_1 - x}.$$

Um diesen Quotienten für den Uebergang zur Grenze geeignet umzuformen, fügen wir die Funktionswerthe $f(u, v_1, w_1)$ und $f(u, v, w_1)$ im Zähler positiv und negativ zu, multipliciren und dividiren einzelne Theile mit $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$ und erhalten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1, w_1) - f(u, v_1, w_1)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$
$$+ \frac{f(u, v_1, w_1) - f(u, v, w_1)}{v_1 - v} \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x} + \frac{f(u, v, w_1) - f(u, v, w)}{w_1 - w} \cdot \frac{w_1 - w}{x_1 - x}.$$

Geht jetzt x_1 über in x, so verschwinden zugleich die Differenzen: $(y_1 - y)$, $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$ und die 3 aus Differenzen der Funktionswerthe bestehenden Zähler, und damit werden die

Differenzenquotienten zu Differentialquotienten. Unser Ausdruck gestaltet sich so zu der Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} \cdot \qquad (9)$$

Algebraische und transscendente Funktionen. Unter den algebraischen Operationen versteht man die Addition, Subtraction, Multiplication, Division und das Potenziren mit constantem Exponenten. Wenn die unabhängige Variabele mit den constanten Grössen nur durch eine endliche Anzahl solcher algebraischen Operationen verbunden ist, so nennt man die Funktion eine algebraische Funktion. Kommen dagegen in dem analytischen Ausdrucke $f(x)$ noch andere Operationen vor oder ist die Anzahl der vorzunehmenden Operationen unendlich gross, so wird die Funktion eine transscendente Funktion genannt. Zu den transscendenten Funktionen gehören die Exponentialfunktionen e^x und a^x und deren Umkehrungen lg x und Log x, ferner die trigonometrischen Funktionen sin x, cos x u. s. w. und als deren Umkehrungen die cyklometrischen Funktionen $y = \text{arc sin } x$, $y = \text{arc cos } x$ u. s. w.

§. 3. Aufgaben zur Differentiation algebraischer Funktionen.

1)	$y = a$	$\frac{dy}{dx} = 0$
2)	$y = ax$	$\quad = a$
3)	$y = ax + b$	$\quad = a$
4)	$y = ax^2$	$\quad = 2ax$
5)	$y = 2x^3$	$\quad = 6x^2$
6)	$y = 4ax^5$	$\quad = 20ax^4$
7)	$y = -\frac{5x^3}{a}$	$\quad = \frac{-15x^2}{a}$
8)	$y = a + 2bx + cx^2$	$\quad = 2b + 2cx$
9)	$y = \frac{a}{x} = ax^{-1}$	$\quad = \frac{-a}{x^2}$
10)	$y = \frac{a}{x^4}$	$\quad = \frac{-4a}{x^5}$

11) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

12) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\quad " = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

13) $y = \sqrt[n]{x^p}$ $\quad " = \frac{p}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{p-n}}$

14) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad " = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

15) $y = \frac{1}{5\sqrt[4]{x^3}}$ $\quad " = -\frac{3}{20} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^7}}$

16) $y = x^3\sqrt{x}$ $\quad " = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{x^5}$

17) $y = \frac{a}{x^3\sqrt{x}}$ $\quad " = -\frac{7}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^9}}$

18) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt[3]{x}}$ $\quad " = -\frac{11}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$

19) $y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$ $\quad " = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

20) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3\sqrt{x}}{m}}$ $\quad " = \frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{x}{m^2}}$.

Die nächstfolgenden Beispiele werden durch Einführung einer Zwischenvariabelen z nach der unter (5) angeführten Formel differentiirt:

21) $y = f(z),\ z = \varphi(x)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

22) $y = (a + bx)^2 = z^2$ $\quad " = 2b(a + bx)$

23) $y = (a - bx)^3$ $\quad " = -3b(a - bx)^2$

24) $y = (a + bx^2)^2$ $\quad " = 4bx(a + bx^2)$

25) $y = (a - bx^3)^5$ $\quad " = -15bx^2(a - bx^3)^4$

26) $y = (a + x^2)^3$ $\quad " = 6x(a + x^2)^2$

27) $y = \left(a - \frac{1}{x}\right)^3$ $\quad " = \frac{3(ax - 1)^2}{x^4}$

28) $y = (a + bx + cx^2)^n$ $\quad " = n(a+bx+cx^2)^{n-1}.(b+2cx)$

29) $y = \frac{1}{a + bx} = z^{-1}$ $\quad " = \frac{-b}{(a + bx)^2}$

30) $y = \frac{1}{(a - bx^2)^3}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{6bx}{(a - bx^2)^4}$

31) $y = \frac{1}{(b - x^p)^n}$ $\qquad$ „ $= \frac{pnx^{p-1}}{(b - x^p)^{n+1}}$

32) $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1-x)^3}$ $\qquad$ „ $= -\frac{4}{x^3} + \frac{9}{(1-x)^4}$

33) $y = \sqrt{a + bx} = z^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{b}{2\sqrt{a + bx}}$

34) $y = \sqrt{2px}$ $\qquad$ „ $= \frac{p}{\sqrt{2px}}$

35) $y = \sqrt{f(x)}$ $\qquad$ „ $= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

36) $y = \frac{1}{\sqrt{a - bx}} = z^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{b}{2\sqrt{(a - bx)^3}}$

37) $y = \sqrt{a - bx^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-bx}{\sqrt{a - bx^2}}$

38) $y = \sqrt{2ax + x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{a + x}{\sqrt{2ax + x^2}}$

39) $y = \sqrt{1 - x^4}$ $\qquad$ „ $= \frac{-2x^3}{\sqrt{1 - x^4}}$

40) $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a - x} - \sqrt{a + x}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

41) $y = \frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{x - a}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$

42) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(2 - x^3)^4}}$ $\qquad$ „ $= \frac{4x^2}{\sqrt[3]{(2 - x^3)^7}}$

43) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x - a)^3}}$ $\qquad$ „ $= \frac{-3}{4\sqrt[4]{(x - a)^7}}$

44) $y = \frac{1}{\sqrt[n]{(a + bx)^p}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{p}{n} \cdot \frac{b}{\sqrt[n]{(a + bx)^{p+n}}}$.

Bei den folgenden Beispielen kommen ausser der angeführten Substitutionsformel auch die zwei folgenden zur Anwendung:

45) $y = u \cdot v$ $\qquad \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$

46) $y = \frac{u}{v}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$

47) $y = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$ $\qquad$ „ $= -4x^3$

48) $y = (a + bx)(a - bx)$ $\qquad$ „ $= -2b^2x$

49) $y = (1 - 2x)(1 + 3x)$ $\qquad$ „ $= 1 - 12x$

50) $y = x^4(a - 2x^3)^2$ $\qquad$ „ $= 4x^3(a - 2x^3)(a - 5x^3)$

51) $y = (a + x)\sqrt{a - x}$ $\qquad$ „ $= \frac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}$

52) $y = x\sqrt{1 + x}$ $\qquad$ „ $= \frac{2 + 3x}{2\sqrt{1 + x}}$

53) $y = x^2\sqrt{a - x}$ $\qquad$ „ $= \frac{4ax - 5x^2}{2\sqrt{a - x}}$

54) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

55) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-a^3}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

56) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}$ $\qquad$ „ $= -\frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{(x^3 - 1)^2}$

57) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ $\qquad$ „ $= \frac{-2}{(1 + x)^2}$

58) $y = \frac{1 - 2x^2}{2 - x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-6x}{(2 - x^2)^2}$

59) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ $\qquad$ „ $= \frac{4x(x - 3)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$

60) $y = \frac{(a + x^2)^3}{(b - x^3)^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{6x(a + x^2)^2(b + ax)}{(b - x^3)^3}$

61) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$

62) $y = \frac{\sqrt{a + bx}}{x}$ $\qquad$ „ $= -\frac{2a + bx}{2x^2\sqrt{a + bx}}$

63) $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{2 + x}{2\sqrt{(1 + x)^3}}$

64) $y = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ab}{(a-bx)^2}\sqrt{\frac{a-bx}{a+bx}}$

65) $y = \frac{1}{x\sqrt{a+x}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{2a+3x}{2x^2\sqrt{(a+x)^3}}$

66) $y = \sqrt{\frac{x}{x^2-a^2}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{x^2+a^2}{2\sqrt{x(x^2-a^2)^3}}$

67) $y = (x+\sqrt{1+x})^2$ $\qquad$ „ $= \frac{2+3x+(2x+1)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}$.

§. 4. Die Differentialquotienten der trigonometrischen und cyklometrischen Funktionen.

Die einfache trigonometrische Funktion $y = \sin x$ gibt zu den Werthen x und x_1 der unabhängigen Variabelen die Funktionswerthe: $y = \sin x$ und $y_1 = \sin x_1$, und dazu den Differenzenquotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(x_1 + x)\sin\frac{1}{2}(x_1 - x)}{x_1 - x}$$

$$= \cos\tfrac{1}{2}(x_1 + x) \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)}.$$

Nun ist bekannt, dass der Quotient $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ kleiner als 1 ist, sich aber der Einheit mehr und mehr nähert, wenn α abnimmt, weil dann sin α und arc α mehr und mehr einander gleich werden und im Augenblick ihres gleichzeitigen Verschwindens ganz zusammenfallen und so den Quotienten 1 besitzen. Mithin ist auch $\lim \frac{\sin\frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)} = 1$, und dann gewinnt der ganze Ausdruck beim Uebergang zur Grenze die folgende Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x. \qquad (10)$$

Der Differentialquotient von sin x ist gleich cos x.

Auf die nämliche Weise wird auch der Differentialquotient von $y = \cos x$ abgeleitet. Den beiden Werthen x und x_1 entsprechen die Funktionswerthe $y = \cos x$ und $y_1 = \cos x_1$, und diesen wieder der Differenzenquotient:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\cos x_1 - \cos x}{x_1 - x} = \frac{-2\sin\frac{1}{2}(x_1 + x)\sin\frac{1}{2}(x_1 - x)}{x_1 - x}$$

$$= -\sin\tfrac{1}{2}(x_1 + x) \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)}.$$

Lässt man darin x_1 in x übergehen, so wird der zweite Faktor wieder gleich 1, und der ganze Ausdruck gestaltet sich zu der folgenden Formel:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x. \qquad (11)$$

Der Differentialquotient von $\cos x$ ist gleich $-\sin x$.

Uebrigens kann diese Formel auch aus der vorhergehenden abgeleitet werden. $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin z$, wenn $z = \frac{\pi}{2} - x$ ist. Da nun $\frac{dy}{dz} = \cos z$, $\frac{dz}{dx} = -1$, so ist $\frac{dy}{dx} = \cos z \,.\, (-1) = -\cos z = -\sin x$.

Die Differentialquotienten von $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ ergeben sich aus den vorhergehenden auf die einfachste Weise:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Aufgaben:

68) $y = \sin(ax) = \sin z$ $\quad \frac{dy}{dx} = a\cos(ax)$

69) $y = \cos(ax)$ $\quad$ „ $= -a\sin(ax)$

70) $y = \sin\frac{x}{a}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{a} \cdot \cos\frac{x}{a}$

71) $y = a\cos\frac{x}{a}$ $\quad$ „ $= -\sin\frac{x}{a}$

72) $y = \sin(x^n) = \sin z$ $\quad$ „ $= nx^{n-1}\cos(x^n)$

73) $y = \cos\sqrt{ax}$ $\quad$ „ $= -\frac{a\sin\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$

74) $y = a\sin\frac{a}{x}$ $\quad$ „ $= -\frac{a^2}{x^2} \cdot \cos\frac{a}{x}$

75) $y = a \cos \frac{1}{x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x}$

76) $y = \sin \sqrt{\frac{1}{x}}$ $\quad$ „ $= \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \cdot \cos \sqrt{\frac{1}{x}}$

77) $y = \operatorname{tg}(ax)$ $\quad$ „ $= \frac{a}{\cos^2(ax)}$

78) $y = a \operatorname{tg} \frac{x}{a}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{a}}$

79) $y = a \operatorname{tg} \frac{a}{x}$ $\quad$ „ $= -\frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{a}{x}}$

80) $y = \sin(a + bx) = \sin z$ $\quad$ „ $= b \cos(a + bx)$

81) $y = \cos(a - bx^2)$ $\quad$ „ $= 2bx \sin(a - bx^2)$

82) $y = \sin^2 x = z^2$ $\quad$ „ $= \sin(2x)$

83) $y = \cos^2(ax)$ $\quad$ „ $= -a \sin(2ax)$

84) $y = 2 \sin^n(ax)$ $\quad$ „ $= na \sin^{n-2}(ax) \sin(2ax)$

85) $y = \cos^n \frac{a}{x}$ $\quad$ „ $= \frac{na}{x^2} \cdot \cos^{n-1} \frac{a}{x} \sin \frac{a}{x}$

86) $y = \frac{1}{\sin x} = z^{-1}$ $\quad$ „ $= -\frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x}$

87) $y = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^n$ $\quad$ „ $= \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x}$

88) $y = \frac{1}{2} \sin x + \sin \frac{x}{2}$ $\quad$ „ $= \cos \frac{3x}{4} \cos \frac{x}{4}$

89) $y = \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x$ $\quad$ „ $= -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x \sin x$

90) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ $\quad$ „ $= \frac{4}{\sin^2(2x)}$

91) $y = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ $\quad$ „ $= 3 \cos 3x$

92) $y = \frac{1}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^4 x}$ $\quad$ „ $= \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$

93) $y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$ $\quad$ „ $= \frac{2 \sin^2 \left(45^0 + \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x}$

94) $y = \sin x \cos x$ $\quad$ „ $= \cos 2x$

95) $y = (1 - \cos 2x)^2$ $\quad$ „ $= 16 \sin^3 x \cos x$

96) $y = 2\cos^2(x+a) - \cos 2x$ $\quad \frac{dy}{dx} = -4\cos(a+2x)\sin a$

97) $y = (x \operatorname{tg} x)^2$ $\quad " = x \operatorname{tg} x \left(\frac{\sin 2x + 2x}{\cos^2 x}\right)$

98) $y = 3\sin x \cos^2 x + \sin^3 x$ $\quad " = 3\cos x \cos 2x$

99) $y = (4\sin x - 8\sin^3 x)\cos x$ $\quad " = 4\cos 4x$

100) $y = (a + b\sin x)\cos x$ $\quad " = b\cos 2x - a\sin x$

101) $y = \sin x \sin(a - x)$ $\quad " = \sin(a - 2x)$

102) $y = \frac{a - b\cos x}{a + b\cos x}$ $\quad " = \frac{2ab\sin x}{(a + b\cos x)^2}$

103) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ $\quad " = \frac{-1}{\cos^2(45^0 + x)}$

104) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$ $\quad " = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

105) $y = \sin x - x\cos x$ $\quad " = x\sin x$.

Die cyklometrischen Funktionen sind die Umkehrungen der trigonometrischen, desshalb lassen sich auch ihre Differentialquotienten aus denjenigen der trigonometrischen Funktionen durch Umkehrung ableiten.

1. $y = \operatorname{arc}\sin x$

ist die Umkehrung von $x = \sin y$. Nun ist:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

und daraus entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (12)$$

2. $y = \operatorname{arc}\cos x$

gehört zu $x = \cos y$. Da nun:

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2}$$

ist, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (13)$$

Kürzer ist die folgende Ableitung:

$$y = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Es ist $x = \operatorname{tg} y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, und daraus durch Umkehrung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \tag{14}$$

4. $y = \operatorname{arc\,cotg} x$.

Aus $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$ erhält man leicht:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{15}$$

Die Ableitung wäre auch so möglich:

$$y = \operatorname{arc\,cotg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg} z, \text{ wenn } z = \frac{1}{x}.$$

Nun ist $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$; $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{16}$$

Aufgaben.

106) $y = \arcsin(ax)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-(a^2x^2)}}$

107) $y = \arccos(a-x)$ $\quad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$

108) $y = \arcsin \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ $\quad$ „ $= \frac{-2a}{a^2+x^2}$

109) $y = \arcsin \frac{1}{x}$ $\quad$ „ $= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

110) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ $\quad$ „ $= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

111) $y = \arccos \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ $\quad$ „ $= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

112) $y = \arccos\left(\frac{a-x}{x}\right)$ $\quad$ „ $= \frac{a}{x\sqrt{2ax-a^2}}$

113) $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \arcsin x \sqrt{\frac{b}{a}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}}$

114) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{1+x^2}$

115) $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{ax}$ $\quad$ „ $= \frac{a}{2(1+ax)\sqrt{ax}}$

116) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a-x}$ $\quad$ „ $= \frac{a}{(a-x)^2 + x^2}$

117) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-2}$ $\quad$ „ $= \frac{-1}{1+(x-2)^2}$

118) $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\quad$ „ $= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

119) $y = \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{2-x}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{2(3-x)\sqrt{2-x}}$

120) $y = \operatorname{arc\,cotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ „ $= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

121) $y = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ $\quad$ „ $= \frac{-1}{2(1+x^2)}$

122) $y = \operatorname{arc}(\cos = \sin x)$ $\quad$ „ $= -1$

123) $y = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = m \operatorname{tg} x)$ $\quad$ „ $= \frac{m}{m^2 + (1-m^2)\cos^2 x}$

124) $y = \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$

125) $y = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = a \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$ $\quad$ „ $= \frac{\frac{1}{2}a}{1 + (a^2-1)\sin^2 \frac{x}{2}}$

126) $y = a \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a} - \sqrt{2ax - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

127) $y = \sqrt{ax - x^2} - a \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a-x}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

128) $y = (x - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x) \cdot \operatorname{arc\,tg} x$ $\quad$ „ $= \frac{x + x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$.

§. 5. Exponential- und logarithmische Funktionen.

In der Binomialentwicklung

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{x^3}{n^3}+\cdots\cdots$$

mag x eine beliebig wählbare Variabele und n eine ganze positive Zahl vorstellen. Dieser Reihe, in der zunächst x positiv sein soll, geben wir die folgende Gestalt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+\cdots\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{1.2.3\ldots.n}.$$

Es sei p eine positive ganze Zahl, kleiner als n und grösser als x. Wir brechen die Reihe unmittelbar hinter dem Gliede mit x^p ab und bezeichnen den Rest mit R_{pn}. Also

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
$$= 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{x^p}{1.2.3\ldots.p}+R_{pn}. \quad (A)$$

Der Rest R_{pn} besteht aus lauter positiven Gliedern. Sein Werth ist also grösser als Null. Andererseits ist R_{pn} kleiner als die Summe

$$\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}+\frac{x^{p+2}}{1.2.3\ldots(p+2)}+\cdots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

und diese ist wieder kleiner als

$$\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}\left\{1+\left(\frac{x}{p+1}\right)+\left(\frac{x}{p+1}\right)^2+\ldots\text{in inf.}\right\},$$

d. h. kleiner als

$$\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{p+1}},$$

folglich haben wir

$$\frac{x^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{p+1}} > R_{pn} > 0. \quad (B)$$

Lässt man nun in der Formel (A) die Zahl n ins Unendliche wachsen und bezeichnet den Grenzwerth von R_{pn} für $n = \infty$ mit R_p, so ergibt sich:

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots+ \\ +\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}+R_p, \quad \text{(C)}$$

und es ist zu bemerken, dass R_p derselben doppelten Ungleichung (B) genügt, wie R_{pn}. Denn der zu grosse und der zu kleine Werth in (B) sind beide von n unabhängig. Wenn sich nun nachweisen lässt, dass für $p = \infty$ der Grenzwerth von R_p gleich Null ist, so darf man statt der rechten Seite von (C) die unendliche Reihe ansetzen. Nun geht aber in (B) der Factor $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{p+1}}$ für $p = \infty$ in 1 über.

Der voranstehende Factor lässt sich so schreiben:

$$\frac{x^k}{1.2.3\ldots k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)\left(\frac{x}{k+2}\right)\cdots\left(\frac{x}{p+1}\right).$$

Wir verstehen unter k eine positive ganze Zahl, die der Bedingung genügt:

$$k+1 > x \geqq k.$$

Wie gross dann auch die endliche Zahl x gewählt werden möge, immer hat der Factor

$$\frac{x^k}{1.2.3\ldots k}$$

einen endlichen Werth. Das Produkt

$$\left(\frac{x}{k+1}\right)\left(\frac{x}{k+2}\right)\cdots\left(\frac{x}{p+1}\right)$$

hat zu Factoren lauter echte Brüche und ist deshalb selbst ein echter Bruch, dessen Grenzwerth $= 0$ ist für $p = \infty$. Folglich ist in der That

$$\lim R_p = 0 \quad \text{für } p = \infty,$$

und wir haben die Entwicklung

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots \quad \text{(D)}$$

in Form einer convergenten unendlichen Reihe.

Zum Zweck weiterer Werthermittlung setzen wir in (D) $x = 1$ und erhalten:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots = e.$$

Weil nun:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

und der Werth der rechten Seite $= 1$ ist, so muss e einen Werth zwischen 2 und 3 besitzen. Wir finden $e = 2{,}718281\ldots$

Da für ein unendlich wachsendes n die beiden Werthe n und nx gleichzeitig unendlich werden, wenn x eine endliche Zahl bedeutet, so dürfen wir in (D) nx statt n setzen, ohne dass dadurch an dem Grenzwerthe links etwas geändert wird. So entsteht:

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = e^x.$$

Durch Vergleich der beiden Werthe für $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ erhält man schliesslich die Entwicklung von e^x in der Form der unendlichen Reihe:

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots \qquad (17)$$

Diese Entwicklung ist zunächst nur für positive Werthe von x bewiesen. Setzen wir nun:

$$f(v) = 1-\frac{v}{1}+\frac{v^2}{1.2}-\frac{v^3}{1.2.3}+\cdots \qquad (E)$$

und beachten, dass die Reihe rechts für endliche Werth von v convergirt. Sie würde auch noch convergiren, wenn man alle Glieder positiv nehmen wollte. Folglich darf man die linken und rechten Seiten von (17) und (E) ausmultipliciren. Dadurch ergibt sich:

$$e^x.f(v) = 1+\frac{(x-v)}{1}+\frac{(x-v)^2}{1.2}+\frac{(x-v)^3}{1.2.3}+\cdots,$$

und wenn man $v = x$ setzt:

$$e^x.f(x) = 1.$$

Folglich ist $f(x) = e^{-x}$, und die Entwicklung (17) ist nun auch für negative Werthe von x als gültig bewiesen.

Soll jetzt die Funktion $y = e^x$ differentiirt werden, so gehen wir aus von der Formel:

$$\frac{\left(1+\frac{x+dx}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{dx} = \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{1+\frac{x}{n}},$$

die sich aus (3) leicht ableiten lässt. Wenn man auf beiden Seiten $n = \infty$ nimmt, so ergibt sich:

$$\frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} = \frac{e^x}{\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^x,$$

d. h. für $y = e^x$ ist

$$\frac{dy}{dx} = e^x. \qquad (18)$$

Man hätte auch so verfahren können. Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \frac{e^{dx} - 1}{dx}.$$

Da e^{dx} nur unmessbar wenig grösser als die Einheit ist, so setzen wir:

$$e^{dx} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right), \text{ folglich } dx \cdot \operatorname{Log} e = \lim \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

und erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \frac{\operatorname{Log} e}{\lim\left[n \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]} = e^x \cdot \frac{\operatorname{Log} e}{\lim \operatorname{Log}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]}$$

$$= e^x \cdot \frac{\operatorname{Log} e}{\operatorname{Log} e} = e^x.$$

Wenn man auf der rechten Seite der Gleichung (17) jedes einzelne Glied der unendlichen Reihe differentiirt, so kömmt dieselbe convergente Reihe wieder zu Stande. Da nun auch links bei der Differentiation wieder e^x herauskömmt, so sieht man, dass es erlaubt ist, auf beiden Seiten der Gleichung (17) zu differentiiren und die Operation rechts an jedem Gliede der unendlichen Reihe vorzunehmen.

Um die allgemeinere Exponentialfunktion $y = a^x$ zu differentiiren, setzen wir $a = e^m$ und haben alsdann $m = \lg a$, d. h. m ist der natürliche Logarithmus von a. Da nun $y = (e^m)^x = e^{mx} = e^z$, wenn $z = mx$, so findet man:

$$\frac{dy}{dz} = e^z, \quad \frac{dz}{dx} = m \text{ und } \frac{dy}{dx} = me^z = m(e^m)^x = a^x \lg a. \quad (19)$$

Die Differentialquotienten der beiden logarithmischen Funktionen gehen wieder durch Umkehrung aus den vorhergehenden hervor. Ist:

$$y = \lg x,$$

$$\text{so ist } x = e^y, \quad \frac{dx}{dy} = e^y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}. \quad (20)$$

Ebenso gehört zu der Funktion:

$$y = \operatorname{Log}_a x$$

die Umkehrung $x = a^y$, und $\frac{dx}{dy} = a^y . \lg a$, woraus dann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y . \lg a} = \frac{1}{\lg a} \cdot \frac{1}{x}. \quad (21)$$

Aufgaben.

129) $y = e^{ax} = e^z$ $\quad \frac{dy}{dx} = ae^{ax}$

130) $y = e^{-ax}$ $\quad$ „ $= -ae^{-ax}$

131) $y = ae^{\frac{x}{a}}$ $\quad$ „ $= e^{\frac{x}{a}}$

132) $y = e^{xx}$ $\quad$ „ $= 2xe^{xx}$

133) $y = e^{2\sqrt{ax}}$ $\quad$ „ $= \frac{ae^{2\sqrt{ax}}}{\sqrt{ax}}$

134) $y = e^{\cos x}$ $\quad$ „ $= -\sin x\, e^{\cos x}$

135) $y = e^{\sin^2 x}$ $\quad$ „ $= \sin 2x\, e^{\sin^2 x}$

136) $y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$ $\quad$ „ $= \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}$

137) $y = x^2 e^x$ $\quad$ „ $= xe^x(2+x)$

138) $y = e^x(x-1)$ $\quad$ „ $= xe^x$

139) $y = e^x x^n$ $\quad$ „ $= (x+n)e^x x^{n-1}$

140) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ $\quad$ „ $= x^2 e^x$

141) $y = a\left(\frac{x}{e^a} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$ $\quad \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{2x}{e^a} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$

142) $y = \cos x\, e^{\sin x}$ $\quad$ „ $= (\cos^2 x - \sin x)\, e^{\sin x}$

143) $y = e^{2x} \sin^2 x$ $\quad$ „ $= e^{2x}(2\sin^2 x + \sin 2x)$

144) $y = \frac{e^x}{x^n}$ $\quad$ „ $= \frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}}$

145) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $\quad$ „ $= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

146) $y = \frac{e^x(x-n)}{x^n}$ $\quad$ „ $= \frac{e^x[x+(x-n)^2]}{x^{n+1}}$

147) $y = \sqrt{e^{ax}}$ $\quad$ „ $= \frac{a}{2}\sqrt{e^{ax}}$

148) $y = \sqrt{x(e^x+1)}$ $\quad$ „ $= \frac{e^x(x+1)+1}{2\sqrt{x(e^x+1)}}$

149) $y = a^{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ „ $= \frac{x a^{\sqrt{x^2+1}} \lg a}{\sqrt{x^2+1}}$

150) $y = a^{\operatorname{tg} x}$ $\quad$ „ $= \frac{a^{\operatorname{tg} x} \lg a}{\cos^2 x}$

151) $y = (a^{mx} + b)^p$ $\quad$ „ $= p\,(a^{mx}+b)^{p-1} a^{mx} m \lg a$

152) $y = a^x . x^a$ $\quad$ „ $= a^x x^{a-1}(a + x \lg a)$

153) $y = \lg(a - x)$ $\quad$ „ $= -\frac{1}{a-x}$

154) $y = \lg(x^n) = n . \lg x$ $\quad$ „ $= \frac{n}{x}$

155) $y = \lg \frac{1}{x} = -\lg x$ $\quad$ „ $= -\frac{1}{x}$

156) $y = \lg(ax) = \lg a + \lg x$ $\quad$ „ $= \frac{1}{x}$

157) $y = (\lg x)^n = z^n$ $\quad$ „ $= \frac{n(\lg x)^{n-1}}{x}$

158) $y = \lg\left(\frac{a}{a+x}\right)$ $\quad$ „ $= -\frac{1}{a+x}$

159) $y = \lg x + \lg x^2 = 3 \lg x$ $\quad$ „ $= \frac{3}{x}$

160) $y = \lg(1 - x^2) = \lg z$ $\quad$ „ $= -\frac{2x}{1-x^2}$

161) $y = \lg\left(1+\frac{a}{x}\right)$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x(a+x)}$

162) $y = \lg(a-\sqrt{x})$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(x-a\sqrt{x})}$

163) $y = \lg(e^{mx}+e^{-mx})$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{m(e^{mx}-e^{-mx})}{e^{mx}+e^{-mx}}$

164) $y = \lg(x+\sqrt{1+x^2})$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

165) $y = x-2\sqrt{x}+2\lg(1+\sqrt{x})$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$

166) $y = \lg\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

167) $y = \lg(a+be^x)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{be^x}{a+be^x}$

168) $y = \lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}\lg(1+x^2)$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1+x^2}$

169) $y = \lg\sqrt{2ax-x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{2ax-x^2}$

170) $y = \lg\frac{1+x}{1-x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1-x^2}$

171) $y = \lg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2-x^2}$

172) $y = \lg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1-x^2)}$

173) $y = \frac{1}{x}\lg x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-\lg x}{x^2}$

174) $y = \lg\frac{1+a^{\sqrt{x}}}{1-a^{\sqrt{x}}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a^{\sqrt{x}}\lg a}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-a^{2\sqrt{x}}}\right)$

175) $y = x\sqrt{a^2+x^2}+\lg(x+\sqrt{a^2+x^2})$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+a^2+1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

176) $y = \lg(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$

177) $y = \frac{m}{2} \lg (x^2 - a^2) + \frac{n}{2a} \lg \frac{x-a}{x+a}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{mx+n}{x^2-a^2}$

178) $y = \frac{1+x^2}{2} \lg (1+x^2) - \frac{x^2}{2}$ $\qquad$ „ $= x \lg (1+x^2)$

179) $y = \frac{3}{4} \lg \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4} \lg \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-3x}{x^4-1}$$

180) $y = \lg (x-1) + 3 \lg (x+1) + \lg (x^2+1) + 5 \operatorname{arc\,tg} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^3+3x^2+2x-7}{x^4-1}$$

181) $y = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}$

182) $y = \frac{1}{x} \lg \frac{1+x}{1-x}$ $\qquad$ „ $= \frac{2}{x(1-x^2)} - \frac{1}{x^2} \lg \frac{1+x}{1-x}$

183) $y = \frac{1-x^4}{2x^2} \lg \frac{1+x}{1-x}$ $\qquad$ „ $= \frac{1+x^2}{x^2} - \frac{x^4+1}{x^3} \lg \frac{1+x}{1-x}$

184) $y = \frac{x}{1-x} \lg x$ $\qquad$ „ $= \frac{1-x+\lg x}{(1-x)^2}$

185) $y = \lg \sin x$ $\qquad$ „ $= \operatorname{cotg} x$

186) $y = \lg \cos x$ $\qquad$ „ $= -\operatorname{tg} x$

187) $y = \lg \operatorname{tg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{2}{\sin 2x}$

188) $y = \lg \operatorname{cotg} x = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\qquad$ „ $= -\frac{2}{\sin 2x}$

189) $y = \lg \sin\left(\frac{x-a}{x}\right) = \lg \sin z$ $\qquad$ „ $= \frac{a}{x^2} \operatorname{cotg}\left(\frac{x-a}{x}\right)$

190) $y = \lg \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2$ $\qquad$ „ $= -\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

191) $y = \lg \sin \sqrt{a+bx}$ $\qquad$ „ $= \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} \operatorname{cotg} \sqrt{a+bx}$

192) $y = \lg \cos \sqrt{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{2x\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1}{x}}$

193) $y = \lg \left(\frac{a+b \operatorname{tg} x}{a-b \operatorname{tg} x}\right)$ $\qquad$ „ $= \frac{2ab}{a^2-(a^2+b^2)\sin^2 x}$

194) $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \cos x = \lg \sin x \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x$

195) $y = \lg f(x) = \lg z \qquad z = \frac{f'(x)}{f(x)}.$

Der Differentialquotient des natürlichen Logarithmus einer Funktion ist gleich einem Bruch, dessen Nenner die Funktion und dessen Zähler der Differentialquotient der Funktion ist.

Funktionen von der Form $y = f(u, v) = u^v$, worin u und v Funktionen von x sind, werden nach Formel (8) differentiirt.

Es ist dann $\frac{\partial f}{\partial u} = vu^{v-1}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = u^v \lg u$, und

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \lg u \cdot \frac{dv}{dx}. \qquad (22)$$

1. Beispiel: $y = (ax)^{mx}$; $u = ax$, $v = mx$; $\frac{du}{dx} = a$, $\frac{dv}{dx} = m$;

$$\frac{dy}{dx} = m(ax)^{mx}(1 + \lg x + \lg a).$$

2. Beispiel: $y = (\sin x)^{\cos x}$; $\frac{du}{dx} = \cos x$, $\frac{dv}{dx} = -\sin x$;

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \lg \sin x).$$

Derartige Funktionen können etwas bequemer behandelt werden, wenn man beiderseits den Logarithmus nimmt und sich erinnert, dass eine Funktion von y, wenn y selbst eine Funktion von x ist, in der Weise nach x differentiirt werden kann, dass man dieselbe zuerst nach y differentiirt und diesen Differentialquotienten noch mit demjenigen von y nach x multiplicirt.

3. Beispiel: $y = x^x$; $\lg y = x \lg x$; $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \lg x$;

$$\frac{dy}{dx} = (1 + \lg x)y = x^x(1 + \lg x).$$

4. Beispiel: $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$; $\lg y = x(\lg a - \lg x)$;

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{a}{x}\right)^x (\lg a - \lg x - 1).$$

5. Beispiel: $y = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\left(\frac{1-x}{x}\right)} = z^z$; $\frac{dy}{dz} = z^z(1+\lg z)$,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\left(\frac{1-x}{x}\right)}\left[1+\lg\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\cdot\frac{1}{x^2}.$$

6. Beispiel: $y = \sqrt[x]{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\lg x)$.

7. Beispiel: $y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\lg x - 1}{x^2}\right)$.

8. Beispiel: $y = (a+bx)^{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{(a+bx)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{bx}{a+bx} - \lg(a+bx)\right)$.

9. Beispiel: $y = \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\left[\lg\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right]$.

10. Beispiel: $y = (\text{arc tg } x)^x$;

$$\frac{dy}{dx} = (\text{arc tg } x)^x\left(\lg \text{arc tg } x + \frac{x}{\text{arc tg } x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right).$$

§. 6. Unentwickelte Funktionen.

Die Entwicklung der Differentialquotienten war seither an die Voraussetzung geknüpft, dass die Funktion explicite in der Form $y = f(x)$ gegeben sei. Sind dagegen die beiden Variabelen in der Weise mit einander verbunden, dass eine Funktion von beiden gleich Null gesetzt wird:

$$f(x, y) = 0,$$

so nennt man y eine unentwickelte Funktion von x, oder man sagt: y ist implicite eine Funktion von x. In der That ist y noch immer von x abhängig, d. h. eine Funktion von x, nur ist die Form dieser Funktion, wir wollen sie $y = \varphi(x)$ nennen, nicht bekannt, und dadurch wird das seitherige Verfahren, den Differentialquotienten zu bilden, wesentlich modificirt.

Sind nun in $z = f(u, v)$ die beiden Variabelen u und v Funktionen von x, so ist nach (8) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$.

Wird in dieser Formel speciell $u = x$ und $v = y$, d. h. gleich einer bestimmten, wenn auch noch nicht explicite gegebenen Funktion von x, und $z = 0$, so geht über:

$$z = f(u, v) \text{ in } f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} \text{ in } \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \text{ in } \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{dx}{dx} = 1, \quad \frac{dv}{dx} \text{ in } \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} \text{ in } 0.$$

Zur Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ erhalten wir so die folgende Relation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder: } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \quad (23)$$

Ist y als Funktion von x in entwickelter Form nicht gegeben, sondern nur implicite durch die Gleichung $f(x, y) = 0$, so kann man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ nach der vorstehenden Formel aus den partiellen Differentialquotienten der Funktion $f(x, y)$ zusammensetzen.

1. Beispiel: $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Man findet direkt:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0, \text{ und daraus } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

oder nach (23): $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Aus der hier darstellbaren entwickelten Form:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ entsteht: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

2. Beispiel: $f = y^n - x^p = 0$; $n y^{n-1} \frac{dy}{dx} - p x^{p-1} = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p x^{p-1}}{n y^{n-1}} = \frac{p}{n} \cdot \frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{p}{n} x^{\frac{p}{n}-1}.$$

Nach der Formel (23) gibt es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -p x^{p-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = n y^{n-1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p x^{p-1}}{n y^{n-1}} \text{ u. s. w.}$$

Will man die bei Funktionen in der entwickelten Form vorkommenden Nenner, Wurzelzeichen und dergl. vermeiden,

so geht man zu den unentwickelten Formen über. Statt $\frac{dy}{dx}$ wird gewöhnlich y' gesetzt.

3. Beispiel: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $f = y^3x^2 - 1 = 0$; $3y^2y'x^2 + 2y^3x = 0$,

$y' = -\frac{2y}{3x}$, oder: $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$, wie auch durch direkte Ableitung aus der entwickelten Form.

4. Beispiel: $y = x\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$, $\frac{y^2}{x^2} = \frac{a+bx}{a-bx}$,

$$f = bxy^2 + bx^3 - ay^2 + ax^2 = 0;$$
$$by^2 + 2bxyy' + 3bx^2 - 2ayy' + 2ax = 0,$$
$$y' = \frac{by^2 + 3bx^2 + 2ax}{2ay - 2bxy}.$$

5. Beispiel: $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$, oder $f = y^4 - 2y^2x - 1 = 0$;

$$4y^3y' - 4yxy' - 2y^2 = 0,\ y' = \frac{y}{2(y^2 - x)} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{1 + x^2}}.$$

Aufgaben.

196) $f = ax + by + c = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = b$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$.

197) $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

198) $y = \frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$; $f = y^2(x - a) - (x + a)^2 = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 3(x + a)^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x - a),$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x + a)^2 - y^2}{2y(x - a)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^3}.$$

199) $f = a^{x-y} - x^y = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = a^{x-y}\lg a - yx^{y-1}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -a^{x-y}\lg a - x^y \lg x,\ \frac{dy}{dx} = \frac{x\lg a - y}{x\lg(ax)}.$$

200) $f = \sin x - \cos y = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin y} = -1$.

201) $f = e^{x+y} - a^x = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} - a^x \lg a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}$, $\frac{dy}{dx} = -1 + \lg a$.

202) $f = e^{ax+by} - c = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax+by}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = be^{ax+by}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$. Aus der einfacheren Form: $ax + by = \lg c$ folgt das gleiche Resultat.

203) $f = (e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(e^y - 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(e^x - 1)$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - 1}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x}{e^y} = -\frac{e^x}{e^y}(e^y - 1)^2$.

204) $f = ay - e^{\sqrt{b-x}} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{\sqrt{b-x}}}{2\sqrt{b-x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = a$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2\sqrt{b-x}}$.

205) $f = \cos x - x \cos y = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x - \cos y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x \sin y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + \cos y}{x \sin y}$.

206) $f = y(x + \sin x) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = y(1 + \cos x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + \sin x$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y \cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x}$.

207) $f = x \sin(x-y) - (x+y) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x-y) + x \cos(x-y) - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \cos(x-y) - 1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x-y) + x \cos(x-y) - 1}{x \cos(x-y) + 1}$.

In den folgenden Aufgaben sollen die partiellen Differentialquotienten nicht getrennt entwickelt, sondern es soll unmittelbar nach der Formel differentiirt werden:

$$f(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

208) $f = y^2 - 2px = 0$; $2yy' - 2p = 0$, $y' = \frac{p}{y}$.

209) $f = \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} - c = 0$; $\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{b}{y}}\,y' = 0$,

$y' = -\sqrt{\frac{by}{ax}}$.

210) $f = \arcsin\frac{x}{y} - \lg x = 0$; $\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\,y' - \frac{1}{x} = 0$,

$y' = \frac{xy - y\sqrt{y^2 - x^2}}{x^2}$.

211) $f = y^2 + x^2 - (ax + b)^2 = 0$; $yy' + x - a(ax + b) = 0$.

212) $f = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2\lambda xy = 0$;
$(x - \alpha + \lambda y) + (y - \beta + \lambda x)\,y' = 0$.

213) $f = y^2(x^2 - 1) - ax^2 = 0$; $y(x^2 - 1)\,y' + x(y^2 - a) = 0$.

214) $f = (ax + by + c)(\alpha x + \beta y + \gamma) - mx^2 - ny^2 = 0$;
$(a + by')(\alpha x + \beta y + \gamma) + (\alpha + \beta y')(ax + by + c)$
$- 2mx - 2nyy' = 0$.

215) $f = (x^2 + y^2 - 1)(ax + by) - mx^2 - ny^2 = 0$;
$2(x + yy')(ax + by) + (a + by')(x^2 + y^2 - 1)$
$- 2mx - 2nyy' = 0$.

216) $f = (1 - ax)(x^2 + y^2) - 4 = 0$;
$-a(x^2 + y^2) + 2(x + yy')(1 - ax) = 0$.

217) $f = \left(1 + x + \frac{1}{y}\right)\left(1 + y + \frac{1}{x}\right) = 0$;

$\left(1 - \frac{y'}{y^2}\right)\left(1 + y + \frac{1}{x}\right) + \left(y' - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + x + \frac{1}{y}\right) = 0$.

218) $f = (x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$;
$(x^2 + y^2 - ax)(2x + 2yy' - a) - a^2(x + yy') = 0$.

219) $f = x^2y^2 - (a^2 - x^2)(y + b)^2 = 0$;
$xy^2 + x^2yy' + x(y + b)^2 - (y + b)y'(a^2 - x^2) = 0$.

220) $f = a^x - e^{x-y} = 0$; $a^x \lg a - e^{x-y} + e^{x-y}\,y' = 0$, $y' = 1 - \lg a$.
Einfacher so: $x \lg a = x - y$; $y' = 1 - \lg a$.

221) $f = y^2 - 2ye^x + 2x \lg y = 0$;
$yy' - e^x(y + y') + \lg y + xy^{-1}y' = 0$.

222) $f = \sin x - \sin(2y - x) = 0$;
$\cos x + \cos(2y - x) - 2y' \cos(2y - x) = 0$.

223) $f = y \sin x + x^2 y^2 + a \cos y + b = 0;$

$y \cos x + y' \sin x + 2xy\,(y + xy') - ay' \sin y = 0.$

224) $f = e^x \cos y - e^y \sin x = 0;$

$e^x \cos y - e^y \cos x - (e^x \sin y + e^y \sin x)\, y' = 0.$

225) $f = \sin x + \sin y + \sin (x + y) = 0;$

$$y' = -\frac{\cos x + \cos (x + y)}{\cos y + \cos (x + y)}.$$

§. 7. Funktionen von der Form:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Oft ist es zweckmässig, y in der Weise von x abhängig zu machen, dass man beide als Funktionen einer dritten Variabelen darstellt, indem man setzt:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Kann t daraus eliminirt werden, so erhält man die entsprechende direkte Beziehung zwischen x und y wieder. So geht z. B. $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ leicht in $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ über.

Da t in diesen Formen die eigentliche unabhängige Variabele ist, so legen wir ihr die besonderen Werthe t und t_1 bei, erhalten die entsprechenden Funktionswerthe:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) & x_1 &= \varphi(t_1) \\ y &= \psi(t) & y_1 &= \psi(t_1) \end{aligned}$$

die wir zu folgender Identität zusammensetzen:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\dfrac{y_1 - y}{t_1 - t}}{\dfrac{x_1 - x}{t_1 - t}}. \qquad (A)$$

Da nun der Uebergang von t_1 in t auch diejenigen von x_1 in x und von y_1 in y zur Folge hat, so gehen die Differenzenquotienten in (A) gleichzeitig in Differentialquotienten über, und wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}. \qquad (24)$$

Unter der Gestalt: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, oder: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ ist (24) nur eine Wiederholung von Formel (5).

1. Beispiel: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $\frac{dx}{dt} = -a \sin t$, $\frac{dy}{dt} = b \cos t$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t$. Wird t eliminirt, so erhält man die Gleichung: $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, oder: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, und daraus für den Differentialquotienten die beiden Formen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Da nun $\operatorname{cotg} t = \frac{bx}{ay}$ und auch $= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ist, so lassen die 3 Formen des Differentialquotienten sich auf einander zurückführen.

2. Beispiel: $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha + b$, $\frac{dx}{dt} = \cos \alpha$, $\frac{dy}{dt} = \sin \alpha$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$. Wird t eliminirt, so entsteht: $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$, und daraus: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$.

Aufgaben:

226) $y = at$, $x = a(1 - t)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -1$

227) $y = \frac{a}{a - t}$, $x = \frac{b}{b - t}$ $\qquad$ „ $= \frac{a(b - t)^2}{b(a - t)^2}$

228) $y = \frac{1 - t}{1 + t}$, $x = \frac{2t}{1 + t}$ $\qquad$ „ $= -1$

229) $y = \frac{t^2}{2}$, $x = \frac{1}{3}\sqrt{2t^3}$ $\qquad$ „ $= \sqrt{\frac{t}{2}}$

230) $y = (e^{at} - 1)^3$, $x = (e^{at} - 1)^2$ $\qquad$ „ $= \frac{3}{2}(e^{at} - 1)$

231) $y = \frac{4(a-t)^3}{a^2 t^2}$, $x = \frac{3a-2t}{at}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2 t}$

232) $y = \sin^2 t$, $x = \sin 2t$ $\quad$ „ $= \frac{1}{4}\operatorname{tg} 2t$

233) $y = b\sin^2 t$, $x = a\cos^2 t$ $\quad$ „ $= -\frac{b}{a}$

234) $y = (1-\cos t)$, $x = (t-\sin t)$ $\quad$ „ $= \operatorname{cotg}\frac{t}{2}$

235) $y = a\cos^2\frac{bt}{2}$, $x = b\operatorname{tg}\frac{bt}{2}$ $\quad$ „ $= -\frac{a}{b}\sin bt\cos^2\frac{bt}{2}$

236) $y = \operatorname{tg} t$, $x = \frac{1}{\cos^2 t}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{4}\operatorname{cotg} t$

237) $y = \sin t - t\cos t$, $x = \cos t + t\sin t$ $\quad$ „ $= \operatorname{tg} t$

238) $y = \frac{1}{2}\sin t + \sin\frac{t}{2}$, $x = \frac{1}{2}\cos t + \cos\frac{t}{2}$ $\quad$ „ $= -\operatorname{cotg}\frac{3}{4}t$

239) $y = t - \cos t$, $x = t - \sin t$ $\quad$ „ $= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\frac{t}{2}}$

240) $y = \frac{a\sin t}{1+b\cos t}$, $x = \frac{c\cos t}{1+b\cos t}$ $\quad$ „ $= -\frac{ab+a\cos t}{c\sin t}$

241) $y = \sin t(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$, $x = \cos t(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ „ $= -\operatorname{cotg} 3t$

242) $y = \frac{\sin^3 t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}$, $x = \frac{\cos^3 t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}$ $\quad$ „ $= -\operatorname{tg} 3t$

243) $y = 2\sin t - \sin 2t$, $x = 2\cos t - \cos 2t$ $\quad$ „ $= \operatorname{tg}\frac{3}{4}t$

244) $y = (a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{2a+r}{2a}t$

$x = (a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$

245) $y = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\qquad$ „ $= 1.$

$x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

§. 8. Differentialquotienten höherer Ordnung.

Entwickelte Funktionen. Der Differentialquotient von $y = f(x)$ ist wieder eine Funktion von x oder eine Constante und kann desshalb den nämlichen Operationen unterworfen werden, durch welche er selbst aus der gegebenen Funktion hervorgegangen ist. Die Funktion, welche entsteht, wenn man den Differentialquotienten einer vorgelegten nochmals differentiirt, wird deren zweiter Differentialquotient genannt und dem ersten analog auf folgende Weise symbolisch bezeichnet:

$$d\frac{dy}{dx} \quad \text{oder:} \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Wird dieser zweite Differentialquotient abermals differentiirt, so erhält man den dritten der ursprünglichen Funktion, welcher durch das Symbol $\frac{d^3y}{dx^3}$ bezeichnet wird. Eine n malige Wiederholung dieser Ableitung führt zu dem Differentialquotienten $\frac{d^ny}{dx^n}$. Einfacher werden die Differentialquotienten höherer Ordnung auf folgende Weise bezeichnet:

$y', y'', y''' \ldots y^{(n)}$, oder: $f'(x), f''(x), f'''(x) \ldots f^{(n)}(x)$.

1. Beispiel: $y = x^p$; $\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p(p-1)x^{p-2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = p(p-1)(p-2)x^{p-3} \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)x^{p-n}$.

2. Beispiel: $y = \sin x$; $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y'''' = \sin x$ u. s. w.

3. Beispiel: $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$ u. s. w.

Aufgaben.

246) $y = x^3$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

247) $y = (a - bx)^4$ $\quad$ „ $= 12b^2(a - bx)^2$

248) $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2$ $\quad$ „ $= 12x^2 - 12x + 10$

249) $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad$ „ $= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

250) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad$ „ $= -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

251) $y = \sqrt{2px}$ $\quad$ „ $= -\frac{p^2}{\sqrt{(2px)^3}}$

252) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{a + bx}}$ $\quad$ „ $= \frac{4b^2}{9\sqrt[3]{(a + bx)^7}}$

253) $y = x + \sqrt[3]{(x - a)^5}$ $\quad$ „ $= \frac{10}{9\sqrt[3]{x - a}}$

254) $y = x(a - x)$ $\quad$ „ $= -2$

255) $y = x + \frac{1}{x}$ $\quad$ „ $= \frac{2}{x^3}$

256) $y = \frac{x}{(a - x)^2}$ $\quad$ „ $= \frac{4a + 2x}{(a - x)^4}$

257) $y = e^{mx}$ $\quad$ „ $= m^2 e^{mx}$

258) $y = a^{mx}$ $\quad$ „ $= a^{mx}(m \lg a)^2$

259) $y = e^{\varphi(x)}$ $\quad$ „ $= e^{\varphi(x)}[(\varphi'(x))^2 + \varphi''(x)]$

260) $y = e^{-x^2}$ $\quad$ „ $= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

261) $y = \lg(1 + x^2)$ $\quad$ „ $= \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$

262) $y = x \lg x$ $\quad$ „ $= \frac{1}{x}$

263) $y = x^2 \lg x$ $\quad$ „ $= 3 + 2 \lg x$

264) $y = \frac{\lg x}{x}$ $\quad$ „ $= \frac{2 \lg x - 3}{x^3}$

265) $y = \sin(a - 2x)$ $\quad$ „ $= -4 \sin(a - 2x)$

266) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ $\quad$ „ $= \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$

267) $y = \arccos x$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

268) $y = x e^{\sin x}$ $\quad$ „ $= e^{\sin x}(2\cos x + x\cos^2 x - x\sin x)$

269) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ $\quad$ „ $= \left(\frac{1}{x}\right)^x \left(-\frac{1}{x} + (1+\lg x)^2\right)$

270) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ „ $= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

271) $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\quad$ „ $= \frac{4x}{(1+x^2)^2}$

272) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$ $\quad$ „ $= -\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$

273) $y = x^6$ $\quad y''' = 6.5.4x^3$

274) $y = \frac{1}{x}$ $\quad$ „ $= -\frac{1.2.3}{x^4}$

275) $y = \sqrt{x}$ $\quad$ „ $= \frac{1.3}{8\sqrt{x^5}}$

276) $y = \lg(a+bx)$ $\quad$ „ $= \frac{2b^3}{(a+bx)^3}$

277) $y = \sin(nx)$ $\quad$ „ $= -n^3 \cos(nx)$.

Ist $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$. Wird auf beiden Seiten nochmals differentiirt, so entsteht:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz}.$$

Eine weitere Differentiation ergibt:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 2\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^3z}{dx^3}.$$

Beispiel: $y = (a+bx^2)^3 = z^3$, $z = a+bx^2$;

$\frac{dy}{dz} = 3z^2$, $\frac{d^2y}{dz^2} = 6z$, $\frac{d^3y}{dz^3} = 6$, $\frac{dz}{dx} = 2bx$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 2b$, $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$;

$\frac{d^3y}{dx^3} = 24b^2x(3a+5bx^2)$.

Unentwickelte Funktionen. Implicite ist y eine Funktion von x, wenn eine Gleichung $f(x, y) = 0$ den Zusammenhang zwischen x und y ausspricht. Wir leiten den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ab. Wird nun der partielle Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial x}$ nochmals partiell nach x differentiirt, so erhält man den zweiten partiellen Differentialquotienten der Funktion genommen nach x und bezeichnet ihn durch $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Ebenso wird durch $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ derjenige Differentialquotient bezeichnet, welcher entsteht, wenn man f zweimal partiell nach y differentiirt. In ganz analoger Weise haben wir unter $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ d. h. $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$ denjenigen Differentialquotienten zu verstehen, der dadurch gewonnen wird, dass man f zuerst partiell nach x und dann partiell nach y differentiirt. Von ihm unterscheidet sich der andere Differentialquotient $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ dadurch, dass bei seiner Ableitung die Funktion $f(x, y)$ zuerst nach y und dann nach x partiell differentiirt wird.

Beispiel: $f = x^3 + 3x^2y - y^3 = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x.$$

In diesem Beispiele ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Es soll nun nachgewiesen werden, dass diese zwei Differentialquotienten, soweit sie mit x und y sich stetig ändern, einander identisch gleich sind. Setzt man in:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim \frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{x_1 - x}$$

an die Stelle von y die besonderen Werthe y und y_1, bildet den Differenzenquotienten und geht zur Grenze über, so erhält man:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \lim \frac{\frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{x_1 - x} - \frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{x_1 - x}}{y_1 - y},$$

wobei durch lim der gleichzeitige Uebergang von x_1 in x und von y_1 in y angezeigt ist. Ebenso entsteht aus:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}$$

durch Substitution der besonderen Werthe x und x_1 und durch analoge Differenz- und Quotientbildung der Ausdruck:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \lim \frac{\frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y)}{y_1 - y} - \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}}{x_1 - x},$$

indem sich das Zeichen lim wiederum auf den gleichzeitigen Uebergang von x_1 in x und von y_1 in y bezieht. Da jeder der beiden unter dem Zeichen lim stehenden Ausdrücke sich auf die Form bringen lässt:

$$\frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y) - f(x, y_1) + f(x, y)}{(x_1 - x)(y_1 - y)},$$

so müssen die angezeigten gleichzeitigen Grenzübergänge auch zu gleichen Resultaten führen, d. h. es muss sein:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \text{oder:} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Doch ist zu bemerken, dass die ganze Beweisführung nur für ein solches Werthegebiet von x und y gilt, in welchem der Grenzwerth

$$\lim \frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y) - f(x, y_1) + f(x, y)}{(x_1 - x)(y_1 - y)}$$

endlich und stetig variabel ist.

Soll nun auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ nochmals und zwar total nach x differentiirt werden, so muss

man sich erinnern, dass $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ die beiden Variabelen x und y enthalten und daher die Regel Anwendung findet: Wenn $F(x, y) = 0$, so ist:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Hiernach erhält man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

und daraus gewinnt man durch die Substitution $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ und die geeigneten Reduktionen schliesslich die Formel:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}. \quad (25)$$

Da die bisherigen Erläuterungen ausreichen, um auch die noch höheren Differentialquotienten einer unentwickelten Funktion herzuleiten, so unterlassen wir es, die bezüglichen allgemeinen Formeln hier besonders aufzustellen.

1. Beispiel: $f = y^2 + bx^2 - 2ay + ax - b = 0;$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2bx + a \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2a$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4b(y-a)^2 + (2bx+a)^2}{4(y-a)^3}.$$

2. Beispiel: $f = e^{ax-by} - c = 0;$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a e^{ax-by} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -b e^{ax-by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 e^{ax-by} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2 e^{ax-by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -abe^{ax-by} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -abe^{ax-by}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Die Form $ax - by = \lg c$ ermöglicht einfacher das gleiche Resultat.

Aufgaben:

Statt der vollständigen Lösungen geben wir hier nur die Theile, aus welchen jene nach (25) zusammengesetzt werden müssen.

278) $f = x^3 - x^2y + y^5 = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - x^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -2x.$

279) $f=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,(2x^2 + 2y^2 + a^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,(2x^2 + 2y^2 - a^2)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 4x^2 + 2a^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 8xy.$

280) $f = e^{\sin x} - xe^{\sin y} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -xe^{\sin y}\cos y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sin x}\cos x - e^{\sin y}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^{\sin y}(\sin y - \cos^2 y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -e^{\sin y}\cos y.$

281) $f = y + ye^{-x} - x = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + e^{-x}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -ye^{-x} - 1$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^{-x}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -e^{-x}.$

282) $f = \sin x + \sin y + \sin(x-y) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \cos(x-y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y - \sin(x-y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x-y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \sin(x-y)$.

Zur Entwicklung von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist bei einfacheren Funktionen auch folgende Methode möglich:

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0; \quad x + yy' = 0, \quad 1 + y'^2 + y''y = 0,$$

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{y} = -\frac{r^2}{y^3}.$$

Funktionen von der Form: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Der erste Differentialquotient ist unter (24) entwickelt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Wird auf beiden Seiten nach x differentiirt, so entsteht:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Unter Berücksichtigung der Relation $\frac{dt}{dx} = 1 : \frac{dx}{dt}$ geht diese Formel über in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Aufgaben.

283) $y = b \sin t$, $x = a \cos t$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a^2 \sin^3 t}$

284) $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ $\quad$ „ $= -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}$

285) $y = \sin^2 t$, $x = \cos 2t$ $\quad$ „ $= 0$

286) $y = e^{at}$, $x = e^{-at}$ $\quad$ „ $= 2e^{2at}$.

Der zweite Differentialquotient kann aus dem ersten auch auf folgende Weise abgeleitet werden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Beispiel: $y = \frac{1}{1-t}$, $x = \lg t$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{1+t}{(1-t)^3}, \quad \frac{dt}{dx} = t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2+t}{(1-t)^3}.$$

§. 9. Anwendung der Differentialrechnung zur Ermittlung der Werthe unbestimmter Formen.

Die Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$. Es kann sein, dass die beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für den nämlichen Werth $x = a$ verschwinden. Ein Bruch von der Form $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ hat dann für $x = a$ den unbestimmten Werth $f(a) = \frac{0}{0}$. Dass aber trotz dieser Unbestimmtheit der Werth ein ganz bestimmter ist, soll zunächst an Beispielen erläutert werden.

1. Beispiel: $f(x) = \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$, $f(a) = \frac{0}{0}$. Werden aber vor der Substitution $x = a$ Zähler und Nenner durch $(x - a)$ dividirt, so wird $f(x) = \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$, woraus dann $f(a) = \frac{3}{2}a$ gefunden wird.

2. Beispiel: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $f(0) = \frac{0}{0}$. Zieht man 1 von der Reihe für e^x ab, dividirt den Rest durch x und setzt dann $x = 0$, so findet man $f(0) = 1$.

3. Beispiel: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$; $f(0) = \frac{0}{0}$. Die reducirte Form: $f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ gibt: $f(0) = \frac{1}{2}$.

4. Beispiel: $f(x)=\frac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a}$; $f(a)=\frac{0}{0}$.

$$f(a)=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)_{x=a}=(x+\sqrt{ax}+x)_{x=a}=3a.$$

Als Ursache der Unbestimmtheit zeigen uns die Beispiele den Umstand an, dass Zähler und Nenner den gemeinsamen Factor $(x-a)$ besitzen, der für $x=a$ verschwindet und so zugleich Zähler und Nenner auf Null bringt. Statt nun, wie geschehen, diesen Factor aufzusuchen und vor der Substitution durch Division zu entfernen, bedienen wir uns mit Vortheil der Methode des Differentiirens. Ist

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ und } f(a)=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{0}{0},$$

so ist $f(a+\delta)=\left[\frac{\varphi(x+\delta)}{\psi(x+\delta)}\right]_{x=a}$ nicht mehr unbestimmt und geht in $f(a)$ über, wenn δ nach und nach verschwindet. Da weiter $\varphi(a)=0$ und $\psi(a)=0$ sind, so kann man auch setzen:

$$f(a+\delta)=\left[\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\psi(x+\delta)-\psi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{(x+\delta)-x}}{\frac{\psi(x+\delta)-\psi(x)}{(x+\delta)-x}}\right]_{x=a}.$$

Lassen wir δ in Null übergehen, so wird gleichzeitig:

$$\lim f(a+\delta)=f(a),$$

$$\lim\left[\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{(x+\delta)-x}\right]_{x=a}=[\varphi'(x)]_{x=a}=\varphi'(a),$$

$$\lim\left[\frac{\psi(x+\delta)-\psi(x)}{(x+\delta)-x}\right]_{x=a}=[\psi'(x)]_{x=a}=\psi'(a),$$

$$f(a)=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (27)$$

1. Beispiel: $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{x^3-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$, $f(2)=\frac{0}{0}$,

$\varphi'(x)=2x-5$, $\psi'(x)=3x^2-4x-1$, $f(2)=\frac{\varphi'(2)}{\psi'(2)}=-\frac{1}{3}$.

2. Beispiel: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $f(0)=\left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0}=1$.

3. Beispiel: $f(x) = \frac{a^x - 1}{x a^x}$; $f(0) = \frac{0}{0}$, $\varphi'(0) = \lg a$, $\psi'(0) = (a^x + x a^x \lg a)_{x=0} = 1$, $f(0) = \lg a$.

Es kommt vor, dass ein Bruchwerth auch in der neuen Form noch unbestimmt bleibt, indem auch $f(a) = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$ ist. Das angezeigte Verfahren der Werthermittelung muss dann bei der neuen Form unverändert wiederholt werden.

4. Beispiel: $f(x) = \frac{x^3 - a x^2 - a^2 x + a^3}{2x^3 - 3ax^2 + a^3}$; $f(a) = \frac{0}{0}$, daher $f(a) = \left[\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{6x^2 - 6ax}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$, und $f(a) = \left[\frac{6x - 2a}{12x - 6a}\right]_{x=a} = \frac{2}{3}$.

5. Beispiel: $f(x) = \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$; $f(0) = \frac{0}{0}$. Die Unbestimmtheit verschwindet erst nach dreimaliger Differentiation von Zähler und Nenner, und man findet:

$$f(0) = \left[\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}\right]_{x=0} = \left[\frac{2 \cos x - 8 \cos 2x}{2 e^x}\right]_{x=0} = -3.$$

Will man von der Voraussetzung ausgehen, dass $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur darum für $x = a$ gleichzeitig verschwinden, weil sie den gemeinsamen Factor $(x - a)$ besitzen, so kann (27) etwas kürzer auf folgende Weise entwickelt werden:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{(x-a)\,\varrho(x)}{(x-a)\,\pi(x)}, \quad f(a) = \frac{\varrho(a)}{\pi(a)};$$

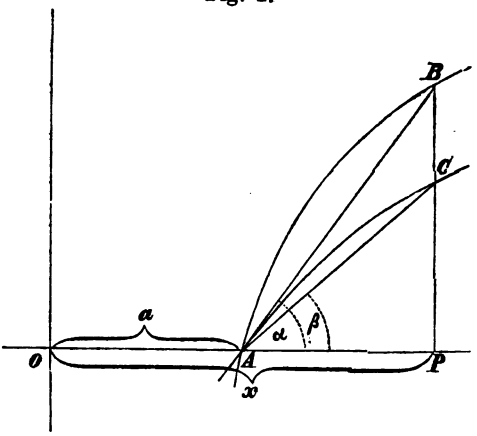
$$\varphi'(x) = \varrho(x) + (x-a)\,\varrho'(x), \quad \psi'(x) = \pi(x) + (x-a)\,\pi'(x).$$

Für $x = a$, aber auch nur für diesen Werth von x, wird

$$\varrho(a) = \varphi'(a), \quad \pi(a) = \psi'(a) \text{ und } f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Auch eine geometrische Ableitung der Formel (27) ist möglich. Wenn AB die Funktionscurve des Zählers $u = \varphi(x)$, AC diejenige des Nenners $v = \psi(x)$ und $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$ ist, so müssen sich die beiden Curven in dem Punkt A schneiden, da ihm die Werthe $x = a$, $u = 0$, $v = 0$ entsprechen. Nun sollen dem beliebigen Werth $x = OP$ die Funktionswerthe $u = \varphi(x) = BP$ und $v = \psi(x) = CP$ zugehören. Es ist dann

Fig. 2.



$$f(x) = \frac{u}{v} = \frac{(x-a)\operatorname{tg}\alpha}{(x-a)\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Geht x in a über, so werden die Sekanten AB und AC zu Tangenten der entsprechenden Curven im Punkt A, und damit geht zugleich $\operatorname{tg}\alpha$ in $\varphi'(a)$, $\operatorname{tg}\beta$ in $\psi'(a)$ über. Für $x = a$ ist mithin

$$f(a) = \left(\frac{u}{v}\right)_{x=a} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Wird $f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \frac{\infty}{\infty}$, so ist $f(a) = \left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$,

und damit ist diese Form auf die vorhergehende zurückgeführt. Wir finden so:

$$f(a) = \left[\frac{\frac{-\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}}{\frac{-\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}\right]_{x=a} = \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2\right]_{x=a}$$

$$\therefore f(a) = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \cdot [f(a)]^2, \quad f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (28)$$

Hat ein Bruch für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so findet man seinen Werth, indem man

Zähler und Nenner differentiirt und dann erst $x = a$ setzt.

Aufgaben.

287) $f(x) = \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{8x^2 - 2x - 1}$ $\quad f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{6}$

288) „ $= \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ $\quad f(1) = n$

289) „ $= \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ $\quad f(1) = \dfrac{1}{2},\ f(2) = \dfrac{3}{5}$

290) „ $= \dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x - 8}{x^4 - 8x^2 + 12}$ $\quad f(\pm\sqrt{2}) = \dfrac{-4 \mp \sqrt{2}}{4}$

291) „ $= \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ $\quad f(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

292) „ $= \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ $\quad f(7) = -\dfrac{1}{56}$

293) „ $= \dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$ $\quad f(3) = \dfrac{8}{69}$

294) „ $= \dfrac{a - \sqrt[5]{2x^5 - a^5}}{\sqrt[3]{x^3 - a^3}}$ $\quad f(a) = 0$

295) „ $= \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ $\quad f(a) = \dfrac{16}{9}a$

296) „ $= \dfrac{x}{e^x - e^{-x}}$ $\quad f(0) = \dfrac{1}{2}$

297) „ $= \dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - x - \lg(e - x)}$ $\quad f(0) = \dfrac{2e}{1 - e}$

298) „ $= \dfrac{x e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}$ $\quad f(0) = -e$

299) „ $= \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ $\quad f(0) = 1$

300) „ $= \dfrac{a^x - 1}{x}$ $\quad f(0) = \lg a$

301) „ $= \dfrac{\lg x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\quad f(1) = 0$

302) $f(x) = \dfrac{a^{\lg x} - x}{\lg x}$ $\qquad f(1) = \lg a - 1$

303) $\quad " \quad = \dfrac{\lg (x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$ $\qquad f(2) = \dfrac{4}{7}$

304) $\quad " \quad = \dfrac{\lg (a + x) - \lg a}{x}$ $\qquad f(0) = \dfrac{1}{a}$

305) $\quad " \quad = \dfrac{\lg \dfrac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $\qquad f(a) = \dfrac{1}{a}$

306) $\quad " \quad = \dfrac{\sin (n x)}{x}$ $\qquad f(0) = n$

307) $\quad " \quad = \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$ $\qquad f(\pi) = -\dfrac{1}{2}$

308) $\quad " \quad = \dfrac{\sin (ax)}{\sin (bx)}$ $\qquad f(0) = \dfrac{a}{b}$

309) $\quad " \quad = \dfrac{2 \sin x - 1}{\cos 3x}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

310) $\quad " \quad = \dfrac{x \cos x}{x - \sin x}$ $\qquad f(0) = \dfrac{1}{0}$

311) $\quad " \quad = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ $\qquad f(0) = 0$

312) $\quad " \quad = \dfrac{\sin 2x - 2 \sin x}{2 e^x - 2 - 2x}$ $\qquad f(0) = 0$

313) $\quad " \quad = \dfrac{2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg} x - 1}{2 \sin^2 x - \cos^2 x - \frac{1}{2}}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{10}{3}$

314) $\quad " \quad = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3}$ $\qquad f(\operatorname{arc\,tg}\, 3) = 2$

315) $\quad " \quad = \dfrac{\operatorname{arc\,sin} (2 - x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ $\qquad f(2) = 0$

316) $\quad " \quad = \dfrac{\operatorname{arc\,sin} \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\qquad f(a) = \dfrac{1}{a}$

317) $\quad " \quad = \dfrac{\operatorname{arc\,cos} (1 - x)}{\sqrt{2x - x^2}}$ $\qquad f(0) = 1$

318) $f(x) = \dfrac{\lg \cos x}{x}$ $\qquad f(0) = 0$

319) „ $= \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

320) „ $= \dfrac{\lg (1 + e^x)}{a + bx}$ $\qquad f(\infty) = \dfrac{1}{b}$

321) „ $= \dfrac{\lg (a + x)}{x}$ $\qquad f(\infty) = 0$

322) „ $= \dfrac{x^4}{e^x}$ $\qquad f(\infty) = 0$

323) „ $= \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$

324) „ $= \dfrac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg} x}$ $\qquad f(0) = \dfrac{1}{2}$

325) „ $= \dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg} \dfrac{x\pi}{2}}$ $\qquad f(0) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

Die Form $\infty - \infty$. Wenn in $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \dfrac{\pi(x)}{\varrho(x)}$ nur $\psi(a)$ und $\varrho(a)$ gleich Null werden, so ist $f(a) = \infty - \infty$. Man transformirt dann vor der Substitution $x = a$ so, dass statt dieser unbestimmten Form die andere $\dfrac{0}{0}$ erscheint.

326) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x - x^3}{x^3 \sin x}$ $\qquad f(0) = \infty$

327) „ $= \dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\dfrac{\pi}{2}}{\cos x}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

328) „ $= \dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{\lg x}$ $\qquad f(1) = -\dfrac{1}{2}$

329) „ $= \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\lg (1 - x)}$ $\qquad f(0) = +\dfrac{1}{2}$

330) „ $= \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{1 - \sin x}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \infty$.

Die Form $0 . \infty$ entsteht, wenn in $f(x) = \varphi(x) . \psi(x)$ für $x = a$ der eine Factor verschwindet, während der zweite unendlich gross wird. Man gibt dann der Funktion die Form:

$$f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0} \text{ oder } = \frac{\infty}{\infty},$$

je nachdem $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = \infty$ ist, oder umgekehrt.

331) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \cdot \lg a^x$ $\qquad f(0) = \lg a$

332) „ $= x . \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $\qquad f(\infty) = 1$

333) „ $= (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ $\qquad f(1) = \frac{2}{\pi}$

334) „ $= \arcsin \frac{x - a}{a} \cdot \operatorname{cotg}(x - a)$ $\qquad f(a) = \frac{1}{a}$

335) „ $= (1 - \sin x) . \operatorname{tg} x$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Weitere unbestimmte Formen. Die Funktion $y = u^v$, worin u und v Funktionen von x sind, lässt sich auch so schreiben $y = e^{v \cdot \lg u}$, weil $\lg y = v . \lg u$. Wird nun für $x = a$

1) $u = 0$ und $v = 0$, so ist $y = 0^0$,
2) $u = \infty$ „ $v = 0$, „ „ $y = \infty^0$,
3) $u = 1$ „ $v = \infty$, „ „ $y = 1^\infty$.

Wenn endlich $y = \sqrt[v]{u}$ ist, so ist auch $\lg y = \frac{1}{v} \cdot \lg u$, oder $y = e^{\frac{1}{v} \cdot \lg u}$. Wird dann für $x = a$

4) $u = 1$ und $v = 0$, so ist $y = \sqrt[0]{1}$,
5) $u = 0$ „ $v = \infty$, „ „ $y = \sqrt[\infty]{0}$,
6) $u = \infty$ „ $v = \infty$, „ „ $y = \sqrt[\infty]{\infty}$.

In allen diesen Fällen nimmt der Exponent von e die Form $0 . \infty$ an.

336) $f(x) = x^x$ $\qquad f(0) = 1$

337) „ $= x^{\frac{1}{x}}$ $\qquad f(\infty) = 1$

338) $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

339) „ $= (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Anmerkung. Wenn, wie es vorkommt, die unbestimmte Form irgend eines Ausdrucks durch Differentation nicht beseitigt werden kann, so nimmt man in der Regel dazu die Reihenentwicklung zu Hülfe.

§. 10. Maxima und Minima der Funktionen.

Entwickelte Funktionen. Wir setzen voraus, dass die Funktion $y = f(x)$ von $x = x_0$ bis $x = x_0 + h$ endlich und stetig variabel sei, und dass der Werth derselben fortwährend zunehme, wenn die unabhängige Variabele das Intervall von x_0 bis $x_0 + h$ stetig wachsend durchläuft. Dann erkennt man sofort, dass der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ auf dem eben genannten Gebiete positiv ist. Denn es sei $x_0 + h \geqq x_1 > x \geqq x_0$, so haben wir nach der Voraussetzung:

$$f(x_1) > f(x),$$

folglich

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} > 0,$$

und diese Umgleichung bleibt erfüllt, wie klein man auch die positive Differenz $x_1 - x$ machen möge. D. h. es ist auch

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x) > 0.$$

Ist dagegen der Werth der Funktion $y = f(x)$ im fortwährenden Abnehmen begriffen, wenn x das Intervall von x_0 bis $x_0 + h$ stetig wachsend durchläuft, so ist der Differentialquotient durchweg negativ. Denn wir haben jetzt

$$f(x_1) < f(x),$$

folglich

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} < 0,$$

und auch noch beim Uebergange zur Grenze:

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x) < 0.$$

Beide Sätze lassen sich, wie man leicht sieht, umkehren. Denn es ist

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)\,dx.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass der Differentialquotient $f'(x)$ positiv sei auf einem Gebiete der unabhängigen Variabelen, welches die Werthe x und $x + ndx$ in sich enthält, so haben wir

$$f(x) < f(x + dx) < f(x + 2dx) < \ldots < f(x + ndx),$$

d. h. die Funktion $f(x)$ ist mit dem wachsenden x im fortwährenden Zunehmen begriffen. Wenn wir dagegen voraussetzen, dass auf dem genannten Gebiete der Differentialquotient negativ sei, so ist:

$$f(x) > f(x + dx) > f(x + 2dx) > \ldots > f(x + ndx),$$

d. h. die Funktion $f(x)$ nimmt fortwährend ab, wenn x von kleineren zu grösseren Werthen übergeht.

Die eben entwickelten Sätze lassen sich sehr einfach geometrisch veranschaulichen, wenn man x und y als die rechtwinkligen Coordinaten einer ebenen Curve ansieht. Dann ist $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die im Punkte (x, y) angelegte Berührungslinie der Curve mit der Richtung der wachsenden x einschliesst. (§. 2.) Und zwar soll die Berührungslinie immer in der Richtung vom Punkte (x, y) nach dem Punkte $(x + dx, y + dy)$ genommen werden. Ist nun die Funktion $y = f(x)$ für wachsende x im Zunehmen begriffen, so steigt die Curve, wenn man sie im Sinne der wachsenden x durchläuft. Es sind dx und dy beide positiv. (Fig. 3a an der Stelle $M_,$; Fig. 4a an der Stelle $M_{,,}$, Fig. 5a an den Stellen $M_,$ und $M_{,,}$.) Die Berührungslinie schliesst mit der Richtung der wachsenden x einen Winkel ein, dessen Cosinus und Sinus beide positiv sind, nämlich der Cosinus $= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ und der Sinus $= \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Es ist dies der positive spitze Winkel α, in Fig. 3a, der positive spitze Winkel

Fig. 3a.

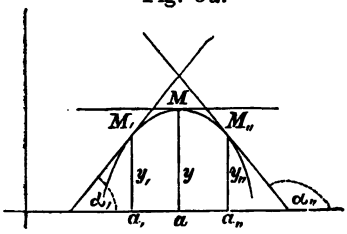


Fig. 4a.

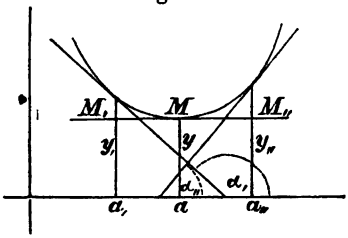


Fig. 3b.

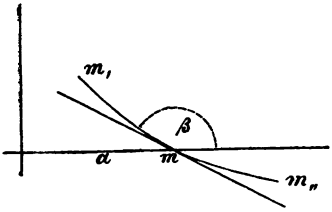


Fig. 4b.

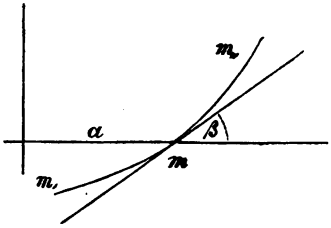


Fig. 5a.

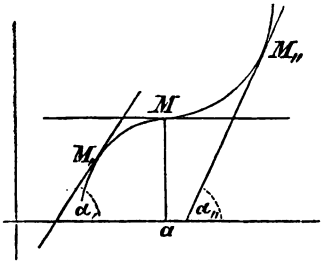


Fig. 6a.

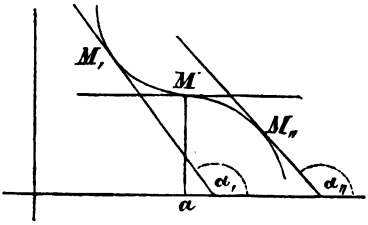


Fig. 5b.

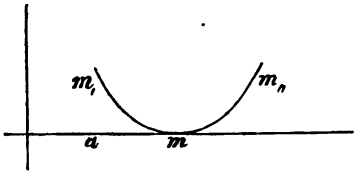
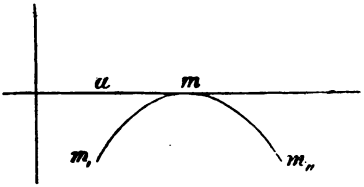


Fig. 6b.



$\alpha_{,,}$ in Fig. 4a, und in Fig. 5a sind es resp. die positiven spitzen Winkel $\alpha_{,}$ und $\alpha_{,,}$. Ist dagegen die Funktion $y = f(x)$ für wachsende x im Abnehmen begriffen, so fällt die Curve, wenn man sie im Sinne der wachsenden x durchläuft. Hier ist dx positiv und dy negativ. (Fig. 3a an der Stelle $M_{,,}$, Fig. 4a an der Stelle $M_{,}$, Fig. 6a an den Stellen $M_{,}$ und $M_{,,}$.) Die Berührungslinie in der oben angegebenen Richtung schliesst mit der Richtung der wachsenden x einen Winkel ein, dessen Cosinus positiv, dessen Sinus negativ ist. Es ist dies der negative spitze Nebenwinkel von $\alpha_{,,}$ in Fig. 3a, von $\alpha_{,}$ in Fig. 4a, von $\alpha_{,}$ und resp. $\alpha_{,,}$ in Fig. 6a. Diese Winkel liegen unterhalb der Abscissenaxe und werden hergestellt, indem man die Berührungslinie über ihren Schnittpunkt mit der Abscissenaxe hinaus verlängert.

Hiernach kann man die oben entwickelten Sätze auch so aussprechen:

Wenn die Curve steigt, so schliesst ihre Berührungslinie in der Richtung vom Punkte (x, y) nach dem Punkte $(x + dx, y + dy)$ mit der Richtung der wachsenden x einen positiven spitzen Winkel ein, und umgekehrt.

Wenn die Curve fällt, so schliesst ihre Berührungslinie in der Richtung vom Punkte (x, y) nach dem Punkte $(x + dx, y + dy)$ mit der Richtung der wachsenden x einen negativen spitzen Winkel ein, und umgekehrt.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir eine Funktion $y = f(x)$, die nebst ihrem ersten Differentialquotienten einen endlichen und stetigen Verlauf hat von $x = a - \delta$ bis $x = a + \delta$. Wir setzen voraus, dass $f'(a) = 0$ sei. Dann ist an der Stelle $x = a$ die Funktion $f(x)$ weder im Zu- noch im Abnehmen begriffen. Oder bei der graphischen Darstellung darf man sagen: die Funktionscurve ist an der Stelle $x = a$ weder im Steigen noch im Fallen begriffen. Man darf diese Stelle bildlich als ein momentanes Niveau bezeichnen. Hier sind vier Fälle zu unterscheiden:

Erstens. Der Differentialquotient $f'(x)$ geht von positiven Werthen durch Null zu negativen Werthen über, wenn die unabhängige Variabele x stetig wachsend die Stelle $x = a$ überschreitet. Dann ist die Funktion $y = f(x)$ bis an die Stelle $x = a$ im Zunehmen und nach Ueberschreitung derselben im Abnehmen begriffen. Der Funktionswerth $f(a)$ ist demnach grösser als $f(a - \delta)$ und grösser als $f(a + \delta)$, wie klein man auch die positive Zahl δ nehmen möge. In diesem Falle nennt man den Funktionswerth $f(a)$ ein Maximum. Graphisch findet sich der Verlauf der Funktion in Fig. 3a dargestellt, wenn man darin x als Abscisse, $f(x)$ als Ordinate ansieht. Den Verlauf des Differentialquotienten $f'(x)$ veranschaulicht Fig. 3b, in welcher x als Abscisse, $f'(x)$ als Ordinate aufgetragen ist.

Zweitens. Der Differentialquotient $f'(x)$ geht von negativen Werthen durch Null zu positiven Werthen über, wenn x stetig wachsend die Stelle $x = a$ überschreitet. Dann ist die Funktion $f(x)$ bis an die Stelle $x = a$ im Abnehmen und nach Ueberschreitung derselben im Zunehmen begriffen. Der Funktionswerth $f(a)$ ist demnach kleiner als $f(a - \delta)$ und kleiner als $f(a + \delta)$, wie klein man auch die positive Zahl δ nehmen möge. In diesem Falle wird der Funktionswerth $f(a)$ ein Minimum genannt. Graphisch ist der Verlauf der Funktion $f(x)$ durch die Ordinaten in Fig. 4a, der Verlauf des Differentialquotienten $f'(x)$ durch die Ordinaten in Fig. 4b veranschaulicht. Die unabhängige Variabele x ist in beiden Figuren als Abscisse genommen.

Drittens. Der Differentialquotient $f'(x)$ ist positiv für $x = a - \delta$, erreicht stetig abnehmend den Werth Null für $x = a$ und nimmt nach Ueberschreitung dieser Stelle stetig zu, so dass er für $x = a + \delta$ wieder positiv ist, wie klein auch δ genommen werden möge. Dann ist die Funktion $f(x)$ vor und nach der Stelle $x = a$ im Zunehmen begriffen. Sie hat also an dieser Stelle weder Maximum noch Minimum. Die Funktion $f(x)$ wird durch die Ordinaten in Fig. 5a, ihr

Differentialquotient $f'(x)$ durch die Ordinaten in Fig. 5b dargestellt.

Viertens. Der Differentialquotient $f'(x)$ ist negativ für $x = a - \delta$, erreicht stetig wachsend den Werth Null für $x = a$ und nimmt nach Ueberschreitung dieser Stelle stetig ab, so dass er für $x = a + \delta$ wieder negativ ist, wie klein auch δ genommen werden möge. Dann ist die Funktion $f(x)$ vor und nach der Stelle $x = a$ im Abnehmen begriffen. Sie hat also an dieser Stelle weder Maximum noch Minimum. Ihr Verlauf wird durch die Ordinaten in Fig. 6a, der Verlauf des Differentialquotienten $f'(x)$ durch die Ordinaten in Fig. 6b vor Augen geführt.

[Wenn eine ebene Curve in einem gewissen Punkte von einer geraden Linie zugleich berührt und geschnitten wird, so nennt man diesen Punkt einen Wendepunkt. In dem dritten und vierten der eben unterschiedenen Fälle hat die Funktionscurve einen Wendepunkt, und ihre Tangente in diesem Punkte liegt hier speciell parallel zur Abscissenaxe.]

Man kann die gewonnenen Resultate auch so zusammenfassen:

I. Eine Funktion $y = f(x)$, die nebst ihrem ersten Differentialquotienten einen endlichen und stetigen Verlauf hat von $x = a - \delta$ bis $x = a + \delta$, besitzt an der Stelle $x = a$ ein Maximum (Minimum), wenn der Differentialquotient $f'(x)$ an dieser Stelle durch Null hindurchgehend sein Vorzeichen ändert. Ein Maximum findet statt, wenn $f'(a - \delta) > 0$ und $f'(a + \delta) < 0$; ein Minimum dagegen, wenn $f'(a - \delta) < 0$ und $f'(a + \delta) > 0$.

II. Wenn aber der Differentialquotient $f'(x)$ mit wachsendem x an der Stelle $x = a$ stetig variabel durch Null hindurchgeht, ohne sein Vorzeichen zu ändern, so hat die Funktion $f(x)$ an dieser Stelle weder Maximum noch Minimum.

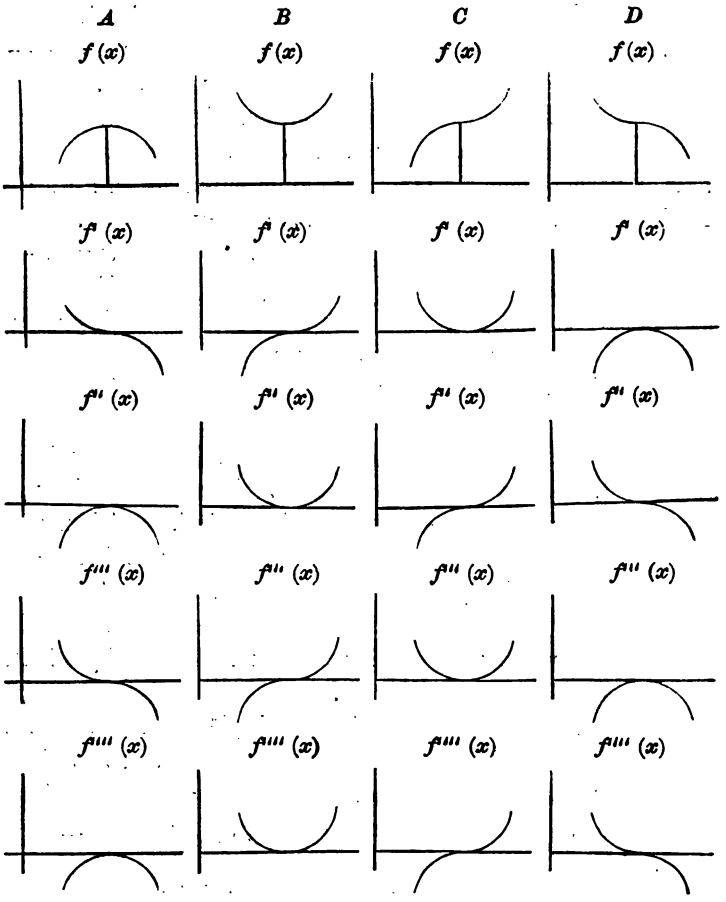
Wir setzen jetzt voraus, dass die Funktion $y = f(x)$ und ihre auf einander folgenden Differentialquotienten $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$... bis zu dem von der n^{ten} Ordnung: $f^n(x)$ von $x = a - \delta$ bis $x = a + \delta$ endlich und stetig variabel verlaufen. Es soll ferner $f^n(x)$ der Differentialquotient von der niedrigsten Ordnung sein, welcher für $x = a$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Alle vorhergehenden Differentialquotienten sollen für $x = a$ zu Null werden: $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n-1}(a) = 0$. Dann lässt sich δ positiv und so klein wählen, dass von $x = a - \delta$ bis $x = a + \delta$ der Differentialquotient $f^n(x)$ sein Vorzeichen nicht ändert. In Folge dessen geht $f^{n-1}(x)$ mit wachsendem x an der Stelle $x = a$ von positiven zu negativen Werthen über oder umgekehrt von negativen zu positiven Werthen, je nachdem $f^n(a)$ negativ oder positiv ist. Im erstgenannten Falle ist $f^{n-2}(a)$ ein Maximum, im zweiten Falle dagegen ein Minimum, wie aus dem Satze I. ohne weiteres hervorgeht. Jedenfalls sieht man, dass $f^{n-2}(x)$ zwischen $a - \delta$ und $a + \delta$ sein Vorzeichen nicht ändert, und dass dies Vorzeichen dasselbe ist wie bei $f^n(x)$. Danach erhält man bei $f^{n-3}(x)$ dieselbe Vorzeichen-Aenderung wie bei $f^{n-1}(x)$, und es wiederholen sich periodisch dieselben Erscheinungen, wenn man schrittweise zu Differentialquotienten von geringerer Ordnung übergeht.

Ist nun n eine gerade Zahl und $f^n(a)$ negativ, so gelangt man zu der Einsicht, dass $f''(x)$ negativ ist. Folglich geht $f'(x)$ mit wachsendem x an der Stelle $x = a$ von positiven zu negativen Werthen über, und es ist $f(a)$ ein Maximum. (Fig. 7. *A*.)

Ist n eine gerade Zahl und $f^n(a)$ positiv, so findet sich, dass $f''(x)$ positiv ist. Folglich geht $f'(x)$ mit wachsenden x an der Stelle $x = a$ von negativen zu positiven Werthen über, und es ist $f(a)$ ein Minimum.(Fig. 7. *B*.)

Ist n ungerade, so hat $f'(x)$ positive oder negative Werthe, je nachdem $f^n(a)$ positiv oder negativ ist. Folglich hat $f(x)$ weder Maximum noch Minimum an der Stelle $x = a$, sondern nur ein momentanes Niveau, weil $f'(a) = 0$ ist. (Fig. 7. *C*. u. *D*.)

Fig. 7.



Die Figuren 7 hat man sich nach unten periodisch fortgesetzt zu denken bis zu einer Funktion $f^n(x)$. Diese ist von $f'(x)$ an gerechnet die erste, für welche an der Stelle $x = a$ die Curve mit der Abscissenaxe nicht zusammentrifft. Und zwar verläuft $f^n(x)$ ganz auf dem Gebiete der negativen Ordinaten in A und D, dagegen ganz auf dem Gebiete der positiven Ordinaten in B und C. Für A und B ist n eine gerade Zahl,

für C und D eine ungerade Zahl. Sind die Figuren 7 in der eben angegebenen Weise vervollständigt, so hat man sie von unten nach oben schrittweise zu durchlaufen, um die oben durchgeführte Argumentation zur Anschauung zu bringen.

Handelt es sich darum, von einer gegebenen Funktion $y = f(x)$, die nebst ihrem ersten Differentialquotienten endlich und stetig verläuft von $x = x_0$ bis $x = x_0 + h$, die Maxima und Minima aufzusuchen, so haben wir dafür die folgende Regel:

Man setze $f'(x) = 0$ und suche die Werthe von x auf, welche dieser Gleichung Genüge leisten und zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegen. Ist $x = a$ ein solcher Werth, so ist $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f''(a)$ negativ oder positiv ist.

Findet sich ausser $f'(a) = 0$ auch $f''(a) = 0$, so suche man den Differentialquotienten der niedrigsten Ordnung auf, der für $x = a$ nicht den Werth Null hat. Ist dieser von ungerader Ordnung, so findet weder Maximum noch Minimum statt. Ist er von gerader Ordnung, so ist $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem jener Differentialquotient für $x = a$ einen negativen oder einen positiven Werth hat.

1. Beispiel: Für welche Werthe von x wird $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ein Max. oder Min.? $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$ gibt $x = \pm 1$; $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Da nun $f''(1) = 2$, d. h. positiv ist, so muss $f(1) = 2$ ein Min. sein, sowie $f(-1) = -2$ ein Max. ist, weil $f''(-1) = -2$ negativ ist.

2. Beispiel: $f(x) = \sin x + \cos x$; $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$; $f''(x) = -\sin x - \cos x$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ ist ein Max., weil $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ ist ein Min., weil $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$. Periodische Wiederholung.

3. Beispiel: Für welchen Werth von x wird $f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ ein Max. oder Min.?

$f'(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x (\lg a - \lg x - 1) = 0$, oder $\lg x = \lg \frac{a}{e}$, $x = \frac{a}{e}$;

$f''(x) = -\frac{1}{x} f(x) + f'(x)(\lg a - \lg x - 1)$; $f''\left(\frac{a}{e}\right) = -\frac{e}{a} \cdot e^{\frac{a}{e}}$,

d. h. negativ, mithin ist $f\left(\frac{a}{e}\right) = e^{\frac{a}{e}}$ ein Max.

4. Beispiel: Für welche Werthe von x wird:

$f(x) = \sin x \sin(\alpha - x)$ ein Max. oder Min.?

$f'(x) = \sin(\alpha - 2x) = 0$, woraus $\alpha - 2x = 0$, oder $= \pi$, oder $= 2\pi$;

$x = \frac{\alpha}{2}$, oder $= \frac{\alpha - \pi}{2}$, oder $= \frac{\alpha}{2} - \pi$; $f''(x) = -2\cos(\alpha - 2x)$.

Nun ist $f''\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2$, also $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ein Max.,

$f''\left(\frac{\alpha - \pi}{2}\right) = 2$, mithin $f\left(\frac{\alpha - \pi}{2}\right) = -\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ein Min. Der dritte Werth ist dem ersten gleich. Periodische Wiederholung.

5. Beispiel: Für welche Werthe von x wird $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ein Max. oder Min.?

$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = 0$, oder $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{5\pi}{4}$.

Wenn $f'(x) = \frac{u}{v}$ ist, so ist $f''(x) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$.

Da nun für den in Betracht kommenden Werth von x der Zähler des Bruches $\frac{u}{v}$ verschwindet, so reducirt sich die letzte Gleichung auf $f''(x) = \frac{u'}{v}$.

In unserem Beispiele wird $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ein Max., $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ein Min., weil $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ negativ und $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ positiv ist. Periodische Wiederholung.

Aufgaben.

Zu den nachfolgenden Aufgaben sind als Lösungen nur die Werthe von x angegeben, für welche die Funktion ihre

Maximal- und Minimalwerthe annimmt; diese selbst können durch Substitution leicht gebildet werden.

340) $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ Mx. für $x = \frac{a}{3}$, Mn. für $x = a$

341) „ $= x^3 + 6x^2 - 15x$ Mx. „ $x = -5$, Mn. „ $x = 1$

342) „ $= x^2(1 - x)$ Mx. „ $x = \frac{2}{3}$, Mn. „ $x = 0$

343) „ $= x^2(a - x)^2$ Mx. „ $x = \frac{a}{2}$, Mn. „ $x = a$
Mn. „ $x = 0$

344) „ $= \frac{x}{x^2 + 1}$ Mx. „ $x = 1$, Mn. „ $x = -1$

345) „ $= x + \frac{a^2}{x}$ Mx. „ $x = -a$, Mn. „ $x = a$

346) „ $= \frac{a^3}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$ Mn. „ $x = \frac{a}{a+1}$; $a > 0$

347) „ $= \frac{x}{x^2 + 2x + 4}$ Mx. „ $x = 2$
Mn. „ $x = -2$

348) „ $= \frac{x}{ax^2 - bx + c}$ Mx. „ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$
Mn. „ $x = -\sqrt{\frac{c}{a}}$

349) „ $= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ Mx. „ $x = -\sqrt{2}$
Mn. „ $x = \sqrt{2}$

350) „ $= \pm\sqrt{2ax - x^2}$ Mx. „ $x = a$, Mn. für $x = a$

351) „ $= \sqrt{2ax^2(2a - x)}$ Mx. „ $x = \frac{4a}{3}$, Mn. „ $x = 0$

352) „ $= x + \sqrt{1 - x}$ Mx. „ $x = \frac{3}{4}$

353) „ $= x\sqrt{2 - x^2}$ Mx. „ $x = 1$, Mn. „ $x = -1$

354) „ $= x\sqrt{ax - x^2}$ Mx. „ $x = \frac{3a}{4}$

355) „ $= (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ Mx. „ $x = \frac{a}{2}$

356) „ $= e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$ Mn. „ $x = 0$

357) „ $= \frac{x^2}{e^x}$ Mx. „ $x = 2$, Mn. „ $x = 0$

358) $f(x)=\frac{a^x}{x}$ Mn. für $x=\frac{1}{\lg a}$ $a>1$

359) „ $=xe^{\frac{1}{x}}$ Mn. „ $x=1$

360) „ $=e^{2x}-e^x$ Mn. „ $x=\lg \frac{1}{2}$

361) „ $=x^x$ Mn. „ $x=\frac{1}{e}$

362) „ $=x^{\frac{1}{x}}$ Mx. „ $x=e$

363) „ $=\frac{x}{\lg x}$ Mn. „ $x=e$

364) „ $=x^{1-\lg x}$ Mx. „ $x=\sqrt{e}$

365) „ $=2\sin x+\sin 2x$ Mx. „ $x=\frac{\pi}{3}$

366) „ $=\sin 2x+2\sin(\alpha-x)$ Mx. „ $x=\frac{\alpha}{3}$, Mn. für $x=-\alpha$

367) „ $=\frac{\cos^2 x}{a^2}+\frac{\sin^2 x}{b^2}$, $a>b$ Mx. „ $x=\frac{\pi}{2}$, Mn. „ $x=0$

368) „ $=\cos x+\cos(\alpha-x)$, $\alpha<\pi$
Mx. für $x=\frac{\alpha}{2}$

369) „ $=\sin x\,.\sin(\alpha+x)$ Mx. „ $x=\frac{\pi-\alpha}{2}$,
Mn. für $x=\pi-\frac{\alpha}{2}$

370) „ $=\sin x\,.\cos(\alpha-x)$ Mx. „ $x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$,
Mn. für $x=\frac{\alpha}{2}+\frac{3\pi}{4}$

371) „ $e^x\,.\cos x$ Mx. „ $x=\frac{\pi}{4}$, Mn. für $x=\frac{5\pi}{4}$

372) „ $\frac{e^x}{\sin x}$ Mn. „ $x=\frac{\pi}{4}$, Mx. „ $x=\frac{5\pi}{4}$.

Bisher sind nur solche Maxima und resp. Minima behandelt, bei denen der Differentialquotient der Funktion endlich ist und sich stetig ändert. Es kann aber auch der Fall vorkommen, dass die Funktion $y=f(x)$ von $x=a-\delta$ bis $x=a+\delta$ endlich und stetig verläuft, der Differentialquotient $f'(x)$ dagegen an der Stelle $x=a$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet.

Hier haben wir $f'(a-0)$ zu unterscheiden von $f'(a+0)$. Wir verstehen unter $f'(a-0)$ den Grenzwerth, welchem sich $f'(x)$ unaufhörlich annähert, wenn man x von kleineren Werthen aus stetig wachsend an die Stelle $x=a$ heranrücken lässt. Dagegen ist $f'(a+0)$ der Grenzwerth der Funktion $f'(x)$ für den Fall, dass man x von grösseren Werthen aus stetig abnehmend an die Stelle $x=a$ bringt. Haben nun $f'(a-0)$ und $f'(a+0)$ verschiedene Vorzeichen, so ist $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f'(a-0)$ positiv oder negativ ist.

Beispiel: Es sei $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, also $\frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}t$ und $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a(\sin\frac{1}{2}t)^4}$. Die Funktion y hat ein Maximum mit stetiger Aenderung von $\frac{dy}{dx}$ an der Stelle $t=\pi$, $x=a\pi$, dagegen ein Minimum mit unstetiger Aenderung von $\frac{dy}{dx}$ an der Stelle $t=0$, $x=0$. Hier ist $\frac{dy}{dx}=-\infty$ für $x=-0$ und $\frac{dy}{dx}=+\infty$ für $x=+0$. Periodische Wiederholung mit der Periode $t=2\pi$.

Unentwickelte Funktionen. Soll aus der Gleichung $f(x,y)=0$ ein Maximal- oder ein Minimalwerth für y hervorgehen, so muss die unabhängige Variabele x so gewählt werden, dass die Bedingung befriedigt ist: $\frac{dy}{dx}=0$. Da nun $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}$, so geht diese in die andere Bedingung über: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$. Im Allgemeinen werden in dieser Gleichung die beiden Variabelen enthalten sein. In Verbindung mit $f(x,y)=0$ gibt sie die gesuchten Werthe von x und die zugehörigen Werthe von y. Wenn für ein solches zusammengehöriges Werthpaar x und y nicht nur $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, sondern zugleich auch $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ wird, so ist $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr gleich Null, sondern unbestimmt, ein Fall,

der später eingehend behandelt werden wird. Hier setzen wir voraus, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht verschwinde. Unter den angeführten Umständen reducirt sich der zweite Differentialquotient auf den Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}$ nach Formel (25).

Beispiel: $f = y^2 + 2x^2y + 4x - 3 = 0;$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2.$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben: $x = 1$, $y = -1$ und $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$. Da für das erste Werthpaar auch $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird, so ist y weder Maximum noch Minimum. Dagegen wird für das zweite Werthpaar $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{9}$, mithin ist $y = 2$ ein Maximum.

Aufgaben:

373) $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

Für $x = 0$ wird $y = b$ ein Max., $y = -b$ ein Min.

374) $f = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ weder Max. noch Min., für $x = \pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ wird $y = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ ein Max. und $y = -\frac{a}{4}\sqrt{2}$ ein Min.

375) $f = x^3 - 3a^2x + y^3 = 0;$

$x = a$ gibt $y = a\sqrt[3]{2}$ als Max. und $x = -a$ gibt $y = -a\sqrt[3]{2}$ als Min.

376) $f = 4x^2 - 20x - 8y + 41 = 0;$

$x = \frac{5}{2}$ macht $y = 2$ zu einem Min.

377) $f = (y - x)^3 + x + 6 = 0;$

$x = -6 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ macht $y = -6 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ zu einem Max.,

$x = -6 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$ macht $y = -6 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ zu einem Min.

378) $f = y^2 - ay - \sin x = 0;\ a > 2.$

$x = \frac{\pi}{2}$ macht $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$ zu einem Max. und $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$ zu einem Min.

Was findet sich für $x = -\frac{\pi}{2}$?

Relative Maxima und Minima. Gegeben ist die Funktion $z = f(x, y)$ und weiter zwischen x und y die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$. Es sollen nun x und y so bestimmt werden, dass sie der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ genügen und zugleich z zu einem Maximum oder einem Minimum machen.

Beispiel: In einen Kreis ist das an Fläche grösste Rechteck zu zeichnen. Sind x, y die Coordinaten des gesuchten Eckpunktes, so ist $z = 4xy$ der Werth, welcher ein Max. werden soll, und zugleich müssen x und y die Bedingung befriedigen: $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, weil der Punkt zur Kreislinie gehört. Hier kann leicht $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ aus der Gleichung $\varphi = 0$ genommen und in $z = 4xy$ substituirt werden, man findet dann, dass $z = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$ für $x = r\sqrt{\frac{1}{2}}$ ein Maximum wird.

In vielen Fällen ist jedoch diese Substitution äusserst schwierig, wenn nicht ganz unmöglich, so dass die Aufgabe auf andere Weise gelöst werden muss. Da y durch die Gleichung $\varphi = 0$ von x abhängt, so muss x als die einzige unabhängige Variabele angesehen werden, und es müssen die Werthe von x, welche z zu einem Maximum oder einem Minimum machen, der Bedingung $\frac{dz}{dx} = 0$ genügen, oder es muss sein:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad \text{(A)}$$

Aus der Gleichung $\varphi = 0$ ergibt sich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(B)}$$

und durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus (A) und (B) entsteht:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0,$$

$$\text{oder:}\quad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \qquad (C)$$

Aus (C) und $\varphi = 0$ findet man jetzt die Werthe für x und y, durch welche z ein Maximum oder ein Minimum wird, und die weitere Frage, ob Maximum oder Minimum, wird wieder durch das Vorzeichen von $\frac{d^2z}{dx^2}$ entschieden, welcher Ausdruck noch zu bilden ist.

Dieses Verfahren lässt übrigens folgende Abänderung zu. Die Bedingung (C) kann auch durch die folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (D)$$

ausgedrückt werden, wenn λ eine willkürliche Constante bedeutet, durch deren Elimination (D) wieder in (C) übergeht. Tritt aber die weitere Gleichung $\varphi = 0$ noch hinzu, so haben wir 3 Gleichungen zwischen den 3 Unbekannten x, y und λ. Da nun weiter

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y}$$

ist, so dienen zur Bestimmung von x, y und λ die folgenden 3 Gleichungen:

$$\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0. \qquad (29)$$

Es bleibt noch übrig, $\frac{d^2z}{dx^2}$ abzuleiten. Aus (A) und (B) entsteht:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right]$$

$$0 = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right].$$

Wird letzte Gleichung mit λ multiplicirt und zur vorhergehenden addirt, so erhält man:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right].$$

Berücksichtigt man, dass für die hier in Betracht kommenden Werthe der Ausdruck $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y}$ verschwindet, so ergibt sich durch Ausführung der angezeigten Differentiation der folgende Werth:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \\ + \left[\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx}.$$

Wird endlich $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ gesetzt, so geht daraus hervor:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Da der Nenner dieses Werthes ohne Einfluss auf das Vorzeichen ist, so wird z ein Maximum, wenn der Zähler negativ, ein Minimum, wenn der Zähler positiv ist.

1. Beispiel: Für welche Werthe von x und y wird $z = xy$ ein Max. oder Min., wenn die Bedingungsgleichung gegeben ist: $\varphi = x^3 + y^3 - axy = 0$. $(f+\lambda\varphi) = xy + \lambda(x^3 + y^3 - axy)$; $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x} = y + \lambda(3x^2 - ay) = 0$; $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y} = x + \lambda(3y^2 - ax) = 0$.

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt $x = y$ und dann aus $\varphi = 0$ weiter:

$$x = y = \frac{a}{2}, \text{ und endlich } \lambda = -\frac{2}{a}, \; z = \frac{a^2}{4};$$

$$\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2} = 6\lambda x = -6, \; \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2} = 6\lambda y = -6,$$

$$\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x\partial y} = 1 - \lambda a = 3; \; \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2 - ay = \frac{a^2}{4},$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y^2 - ax = \frac{a^2}{4}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = -18$, folglich $z = \frac{a^2}{4}$ ein Max.

2. Beispiel: Aus einer Seite a und dem gegenüber liegenden Winkel α soll das an Fläche grösste Dreieck gezeichnet werden. Nennen wir die an der Seite a liegenden Winkel x und y, so ist $F = \frac{a^2 \sin x \sin y}{2 \sin \alpha}$. Da nun ein aus constanten und variabelen Factoren zusammengesetztes Produkt seinen grössten oder kleinsten Werth annimmt, wenn das Produkt der variabelen Factoren am grössten oder kleinsten wird, so dürfen wir a^2 und $2 \sin \alpha$ unterdrücken und $z = f(x, y) = \sin x \sin y$ als diejenige Funktion ansehen, welche durch passende Wahl von x und y zu einem Max. wird. Zugleich besteht die Relation $\varphi = x + y + \alpha - 180^0 = 0$, so dass $(f + \lambda\varphi) = \sin x \sin y + \lambda(x + y + \alpha - 180^0)$, $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x} = \cos x \sin y + \lambda = 0$, $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y} = \sin x \cos y + \lambda = 0$ ist, woraus leicht $\sin(x - y) = 0$, oder $x - y = 0$, erhalten wird, weil die andere Relation $x - y = 180^0$ hier nicht zulässig ist. Für $y = x$ wird dann weiter $\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2} = -\sin^2 x$, $\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2} = -\sin^2 x$, $\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x \partial y} = \cos^2 x$, und da $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1$ ist, so wird für $y = x$ der Werth $\frac{d^2 z}{dx^2}$ negativ und die Fläche ein Max. Unter allen möglichen Dreiecken mit gegebener Basis und gegebenem Winkel an der Spitze besitzt das gleichschenkelige die grösste Fläche.

Eine andere Aufgabe, nämlich die: In einen gegebenen Kreisabschnitt das grösste Dreieck zu zeichnen, fällt mit dieser genau zusammen.

Aufgaben.

379) Wie gross muss der Winkel an der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks in gegebenem Kreise gewählt werden, wenn die Fläche des Dreiecks ein Max. werden soll?

Wenn r der Halbmesser des Kreises und x der gesuchte Winkel ist, so ist $F = 4r^2 \sin^3 x \cos x$ und wird Max. für $\cos x = \frac{1}{2}$, oder $x = 60^0$. Im Kreise hat das gleichseitige Dreieck die grösste Fläche.

380) In einem Dreieck ist die Basis $= a$ und der Winkel an der Spitze $= \alpha$ gegeben. Wie ist das Dreieck zu zeichnen, wenn sein Umfang ein Max. werden soll?

Sind x und y die beiden anderen Seiten, so ist:

$$f = x + y + a, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha - a^2 = 0.$$

Man findet f als Max. für $x = y$.

381) Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist $= a$. Wie sind seine Katheten x und y zu wählen, damit die Fläche ein Max. wird?

$z = xy$, $\varphi = x^2 + y^2 - a^2 = 0$; z wird Max. für $y = x$.

382) Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks ist constant, nämlich $x + y = 2s$. Wie sind die Katheten zu wählen, wenn die Hypotenuse s ein Min. werden soll?

$s =$ Min. für $x = y$.

383) Zwischen den Schenkeln eines Winkels α, dessen Scheitel A ist, liegt ein Punkt M. Man soll durch M eine Gerade ziehen, welche die Schenkel in B und C schneidet und zwar so, dass das Dreieck ABC ein Min. wird.

Wir ziehen durch M zu AC eine Parallele, welche AB in D schneidet. Gegeben: $AD = a$, $MD = b$; gesetzt: $AB = x$, $AC = y$. $F = \frac{1}{2}xy\sin\alpha$, oder $z = xy$; $\varphi = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - 1 = 0$. $F =$ Min. für $x = 2a$, oder $MB = MC$.

384) In der Basis AB eines Dreiecks ABC ist ein Punkt M gegeben, eine Parallele zu AB soll die Seiten in D und E schneiden. In welcher Entfernung von der Basis muss DE gezogen werden, wenn das Dreieck DEM ein Max. sein soll?

Wir setzen Basis $AB = b$, Höhe des Dreiecks $ABC = h$, Basis $DE = y$, Höhe des Dreiecks $DME = x$ und haben: $F = \frac{1}{2}xy$, $\varphi = bx + hy - bh = 0$; $F =$ Max. für $x = \frac{1}{2}h$.

385) Die Grundlinie b und die Höhe h eines Dreiecks sind gegeben. Wie ist das Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe der beiden anderen Seiten ein Min. werden soll?

Sind x und y die Winkel an der Basis, so ist $z = \frac{h}{\sin x} + \frac{h}{\sin y}$ die Seitensumme, u. $bh = 2F = \frac{b^2 \sin x \sin y}{\sin(x+y)}$ oder $\varphi = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y - \frac{b}{h} = 0$. Für $x = y$ wird z ein Min.

386) Auf den Seiten AB und BC eines Dreiecks sollen die Punkte D und E so gefunden werden, dass ihre Verbindungslinie DE das Dreieck halbirt und ein Min. wird.

$$BD = x,\ BE = y,\ BA = a,\ BC = b;$$

$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos B$, $\varphi = xy - \frac{ab}{2} = 0$. Man findet $z = x^2 + y^2 - ab\cos B$ als Min., wenn $x = y = \sqrt{\frac{ab}{2}}$.

387) Eine Gerade DE und 2 auf der nämlichen Seite gelegene Punkte A und B sind gegeben, man soll in DE einen Punkt C so finden, dass $AC + CB$ ein Min. wird.

Man ziehe AP und BQ senkrecht zu DE; setze $AP = p$, $BQ = q$, $PQ = a$; $\sphericalangle ACP = x$, $\sphericalangle BCQ = y$, so ist $z = AC + BC = \frac{p}{\sin x} + \frac{q}{\sin y}$, $\varphi = p\ \operatorname{cotg} x + q\operatorname{cotg} y - a = 0$; z wird Min. für $x = y$.

388) Ein Winkel α mit dem Scheitel A und eine Gerade $BC = a$ sind gegeben. Es soll BC so in den Winkel getragen werden, dass die Endpunkte B und C auf die Schenkel des Winkels fallen und das Dreieck ABC ein Max. wird.

$F = \frac{1}{2} xy \sin\alpha$, $\varphi = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha - a^2 = 0$. F = Max. für $x = y$. Hierbei ist $AB = x$, $AC = y$.

389) Gegeben ist ein rechter Winkel mit dem Scheitel A und auf dem einen Schenkel die Punkte B und C. Man soll auf dem andern Schenkel einen Punkt D so finden, dass Winkel $BDC = v$ möglichst gross wird.

$AB = a$, $AC = b$, $AD = x$, $\sphericalangle ABD = \alpha$, $\sphericalangle ACD = \beta$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{b}$; $\operatorname{tg} v = \frac{(b-a)x}{ab + x^2}$ wird mit v selbst Max. für $x = \pm\sqrt{ab}$.

390) Welches von allen Vierecken, die aus den 4 gegebenen Seiten a, b, c, d construirt werden können, hat die grösste Fläche?

Ist x der von a und b, y der von c und d eingeschlossene Winkel, so ist $2F = ab\sin x + cd\sin y$.

Durch die Diagonale wird die Relation vermittelt:

$$\varphi = 2ab\cos x - 2cd\cos y - a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 0.$$

Man findet, dass für $\sin(x+y) = 0$, d. h. $x + y = 180^0$ F ein Max. wird.

391) In eine Ellipse soll das grösste Rechteck gezeichnet werden.

Gl. der El.: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

$F = 4xy = 2ab\sin 2t =$ Max. für $t = 45^0$, oder:

$x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

392) Wie ist der Halbmesser eines Kreises zu wählen, wenn ein Ausschnitt von gegebenem Umfang $= 2a$ die grösste Fläche besitzen soll?

Ist der Halbmesser $= x$ und der Bogen $= 2y$, so ist $x + y = a$ und $F = xy$ ein Max. für $x = \frac{a}{2}$.

393) Ein Parabelsegment wird durch eine zur x-Achse senkrechte Sehne BC begrenzt, deren Abstand vom Scheitel A gleich a ist. Eine zweite Sehne MN soll parallel zur Achse so gezogen werden, dass ein Rechteck, dessen eine Seite MN ist und dessen andere Seite in BC liegt, die grösste Fläche besitzt.

Sind x, y die Coordinaten des gesuchten Punktes M, so ist $F = y(a - x)$ und $y^2 = 2px$; $F =$ Max. für $x = \frac{a}{3}$.

394) Die vorhergehende Aufgabe, nur soll der Umfang des Rechtecks ein Min. werden.

$\frac{1}{2}\ U = y + a - x;\ y^2 = 2px$. Man findet $U =$ Min. für $y = p,\ x = \frac{1}{2}p$.

395) Zwei Tangenten eines Kreises bilden einen Winkel $= 2\alpha$. Wie ist eine dritte Tangente zu legen, wenn das dem Kreise umschriebene Tangentendreieck ein Min. werden soll?

Die Winkel, welche die dritte Tangente mit den gegebenen bildet, mögen $2x$ und $2y$ sein; dann ist:

$$F = r^2(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} \alpha) \text{ und}$$

$\varphi = x + y + \alpha - 90^0 = 0$. F wird Min. für $x = y$.

396) In einem Kreise ist eine Sehne AB gegeben und es soll im kleineren Abschnitt zu ihr parallel eine zweite Sehne CD so gezogen werden, dass das Paralleltrapez $ABCD$ ein Max. wird.

Es sei M der Mittelpunkt, MH der zu AB senkrechte Halbmesser, $\sphericalangle AMH = \alpha$, $\sphericalangle CMH = x$, so ist $2F = r^2(\sin x + \sin \alpha)(\cos x - \cos \alpha)$ und wird Max. für $x = \frac{\alpha}{3}$.

397) Es soll bewiesen werden, dass der Kreis als das reguläre Vieleck angesehen werden kann, welches bei constantem Umfange $= P$ die grösste Fläche besitzt.

Ist x die Seitenzahl und P der Umfang des Vielecks, so wird dessen Fläche $F = \frac{P^2}{4x} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{x}$ ein Max., wenn $\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{2\pi}{x}$, d. h. $x = \infty$ ist.

398) Ein gerader Kreiskegel, dessen Spitze A und Basisdurchmesser BC heisst, soll durch eine zu AC parallele Ebene so geschnitten werden, dass der Inhalt der entstehenden Parabelfläche ein Max. ist.

Es sei S der auf AB gelegene Scheitel, SD die zu AC parallele Achse der Parabel, mithin D ein Punkt von BC. Es sei ferner $SD = x$ und die zu x gehörige Ordinate $= y$, so ist $F = \frac{2}{3}xy$ und $y^2 = BD \cdot DC = DC(2r - DC)$.

Ist noch $AB = s$, so ist schliesslich $y = \frac{2r}{s}\sqrt{sx - x^2}$ und F wird Max. für $x = \frac{1}{2}s$ oder $AS = \frac{1}{2}AB$.

399) Um ein Rechteck soll die an Fläche kleinste Ellipse beschrieben werden.

a und b die halben Rechteckseiten, x und y die Halbachsen. $F = xy\pi$ und $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0$. Es wird $F =$ Min. für $x = a\sqrt{2}$, $y = b\sqrt{2}$.

400) Um ein gleichschenkeliges Dreieck soll die an Fläche kleinste Ellipse gezeichnet werden, deren kleine Achse parallel zur Grundlinie des Dreiecks laufe.

Spitze des Dreiecks A, Basis $BC = 2n$, Höhe $= h$. Sind u und v die Halbachsen, so heisst die Scheitelgleichung der Ellipse: $u^2y^2 = v^2(2ux - x^2)$ und so besteht die Relation: $u^2n^2 = v^2(2uh - h^2)$. Die Fläche $F = uv\pi$ wird ein Min. für $u = \frac{1}{2}h$.

401) In ein gleichschenkeliges Dreieck soll eine Ellipse so gezeichnet werden, dass sie die Seiten des Dreiecks berühre, dass ihre kleine Achse parallel zur Grundlinie des Dreiecks laufe und dass ihre Fläche ein Max. sei.

$AB = 2n$ die Basis, C Spitze, $DC = h$ Höhe und zugleich x-Achse, AB y-Achse, u und v Halbachsen. Nun ist $u^2y^2 = v^2(2ux - x^2)$ die Scheitelgleichung der Ellipse und $y = -\frac{n}{h}x + n$ die Gleichung von AC. Suchen wir die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der Ellipse und AC und setzen den Wurzeltheil gleich Null, so ist dies die Bedingung dafür, dass die Gerade die Curve berührt. Sie heisst: $v^2 + \frac{2n^2u}{h} - n^2 = 0$; $F = uv\pi$ wird Max. für $u = \frac{h}{3}$.

402) In ein gleichschenkeliges Dreieck soll eine Parabel so gezeichnet werden, dass ihre Achse auf der Mitte der Grund-

linie rechtwinkelig stehe, dass sie die beiden gleichen Seiten berühre und das von der Basis begrenzte Parabelsegment ein Max. sei.

Es sei A die Spitze, h die Höhe, $BC = 2n$ die Basis des Dreiecks, A der Anfangspunkt der Coordinaten, S der Parabelscheitel, $AS = u$. Die Achse der x geht durch die Mitte der Grundlinie des Dreiecks. Die Parabelgleichung heisst: $y^2 = 2p(x - u)$, die Gleichung von AB: $y = \frac{n}{h}x = kx$. Als Bedingung dafür, dass AB die Curve berühre, wird gefunden: $p - 2k^2u = 0$, worin auch p noch unbekannt ist. Die Fläche $F = \frac{4}{3}\sqrt{2p(h-u)^3}$ wird ein Max. für $u = \frac{h}{4}$.

403) Ein Kreis ist durch eine Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ bestimmt. Anfangspunkt und x-Achse des Systems sind zugleich Scheitel und Achse einer Parabel, welche den Kreis in den Punkten B und C schneidet. Wie muss der Parameter p der Parabel gewählt werden, wenn das von BC begrenzte Segment derselben ein Max. werden soll?

Die Coordinaten von B mögen x und y sein, dann ist $F = \frac{4}{3}xy$, $y^2 = 2px$ und $y^2 = 2rx - x^2$, woraus folgt, dass $F = \frac{4}{3}\sqrt{p(r-p)^3}$ ein Max. wird für $p = \frac{r}{4}$.

404) Welcher von allen geraden Kreiscylindern, deren Oberfläche $= a^2$ ist, besitzt das grösste Volumen?

$x =$ Basishalbmesser, $y =$ Höhe, $V = x^2y\pi$,
$\varphi = 2\pi x(x + y) - a^2$; V wird ein Max. für $y = 2x$.

405) Ein gerader Kreiskegel soll parallel zur Basis so geschnitten werden, dass der zwischen der Schnittfläche und der Kegelbasis gelegene gerade Kreiscylinder an Volumen ein Max. ist.

$r =$ Basishalbmesser, $h =$ Höhe des Kegels; $x =$ Basishalbmesser, $y =$ Höhe des Cylinders. $V = x^2y\pi$;
$\varphi = hx + ry - hr = 0$. V wird Max. für $x = \frac{2r}{3}$.

406) Welcher von allen geraden Kreiskegeln von gleicher Seitenlänge $= s$ hat den grössten Cubikinhalt?

Das Volumen wird ein Max., wenn der Basishalbmesser $= s\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist.

407) Aus einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, soll ein Sector so geschnitten werden, dass der übrig bleibende Theil der Kreisfläche, als Kegelmantel verbraucht, einen Kegel bestimmt, dessen Volumen ein Max. ist.

Ist x der Halbmesser der Kegelbasis, so wird V ein Max. für $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

408) Eine Pyramide soll parallel zur Basis durchschnitten und die Schnittfläche als Endfläche eines Prismas benutzt werden, dessen congruente Grundfläche in der Basis der Pyramide liegt. Wo ist der Schnitt zu führen, wenn das Volumen des Prismas ein Max. werden soll?

B Grundfläche, h Höhe der Pyramide; y Grundfläche, x Höhe des Prisma. Es ist $y : B = (h - x)^2 : h^2$ und $V = xy$ ein Max. für $x = \frac{h}{3}$.

409) Dieselbe Aufgabe, nur soll statt des Prismas eine zweite Pyramide construirt werden, deren Grundfläche die Schnittfläche ist und deren Spitze in der Basis der gegebenen Pyramide liegt.

410) Dieselbe Aufgabe, nur sollen statt der beiden Pyramiden 2 Kegel gesetzt werden.

411) In der Achse einer Parabel ist ein Punkt B gegeben und man soll senkrecht zur Achse zwischen B und dem Scheitel A eine Sehne CD so ziehen, dass der Kegel, welchen das Dreieck BCD bei seiner Drehung um die Parabelachse erzeugt, möglichst gross werde.

Schneidet CD die Achse in P und ist $AB = a$, $AP = x$, $CP = y$, so ist $y^2 - 2px = 0$ und $V = \frac{y^2\pi(a-x)}{3}$ ein Max. für $x = \frac{a}{2}$.

412) Eine regelmässige Pyramide mit quadratischer Basis soll so in eine Kugel gezeichnet werden, dass ihre Ecken in der Kugeloberfläche liegen und ihr Volumen ein Max. sei.

Ist x der Abstand der Grundfläche von dem Kugelmittelpunkt und y die halbe Seite dieser quadratischen Grundfläche, so ist $V = \frac{1}{2} y^2 (r + x)$ und $x^2 + 2y^2 - r^2 = 0$.

Für $x = \frac{r}{3}$ wird V ein Max.

413) Für welchen Punkt eines Ellipsenquadranten schliessen Durchmesser und Normale den grössten Winkel ein?

Gesuchter Punkt x, y; gesuchter Winkel $= \psi$;

$\operatorname{tg} \psi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} xy$ wird mit xy ein Max. für $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

414) Nachzuweisen, dass die Tangente durch den in der vorhergehenden Aufgabe gefundenen Punkt mit den Achsen ein Minimaldreieck einschliesst.

415) Zwei Kugeln liegen ganz auseinander. In welchem Punkte ihrer Centrallinie kann das Max. der Summe der beiden Kugelhauben übersehen werden?

416) Ueber der Centrallinie zweier Kugeln als Durchmesser ist in irgend einer der hindurch gehenden Ebenen ein Kreis beschrieben. Von welchem Punkte dieses Kreises aus kann die grösste Summe der beiden Kugelhauben übersehen werden?

§. 11. Die Reihen von Taylor und Maclaurin.

Es sei $f(a + x)$ eine einwerthige Funktion von x, welche nebst ihren Differentialquotienten von der ersten bis zur n^{ten} Ordnung endlich und stetig variabel verläuft auf einem Gebiete der unabhängigen Veränderlichen x, das die Stelle $x = 0$ in sich enthält. Wir nehmen x nur innerhalb dieses Gebietes. Es soll versucht werden, $f(a + x)$ in Form einer Reihe zu entwickeln, welche nach Potenzen von x mit steigenden positiven ganzen

Exponenten geordnet ist. Wir geben der Reihe zuerst eine endliche Gliederzahl:

$$f(a+x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+x^n\psi(x). \quad (A)$$

Hier sind A_0, A_1, A_2, A_3, ... A_{n-1} vorläufig unbestimmte Coefficienten und es ist $x^n\psi(x)$ eine unbekannte Funktion von x, welche aber dieselben Eigenschaften besitzt, die wir in der Voraussetzung der Funktion $f(a+x)$ zugeschrieben haben. Wenn wir nun in der Gleichung (A) auf beiden Seiten $n$mal hinter einander differentiiren, so ergibt sich ein System von neuen Gleichungen, die so geschrieben werden können.:

$$\begin{aligned}
f'(a+x) &= A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+ (n-1)A_{n-1}x^{n-2}+x^{n-1}\psi_1(x)\\
f''(a+x) &= 1.2A_2+2.3A_3x+\ldots+ (n-2)(n-1)A_{n-1}x^{n-3}+x^{n-2}\psi_2(x)\\
f'''(a+x) &= 1.2.3A_3+\ldots+(n-3)(n-2)(n-1)A_{n-1}x^{n-4}+x^{n-3}\psi_3(x) \quad (B)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n-1)}(a+x) &= 1.2.3\ldots(n-1)A_{n-1}+x\psi_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist $\psi_1(x) = x\psi'(x) + n\psi(x)$, $\psi_2(x) = x\psi'_1(x) + (n-1)\psi_1(x)$, u. s. f. Wir wollen versuchen, ob die Entwicklung sich so einrichten lässt, dass $\psi(x)$ keinen Nenner enthalte, der für $x=0$ selbst zu Null würde. Die ganze Untersuchung erhält dadurch etwas Hypothetisches, und erst der Erfolg kann darüber entscheiden, ob die Hypothese zutrifft. Ist dies der Fall, so kommen auch in $\psi_1(x)$, in $\psi_2(x)$, ... in $\psi_{n-1}(x)$ keine Nenner vor, welche für $x=0$ selbst in Null übergehen. Wir geben in (A) und (B) der Variabelen x den Werth Null und erhalten:

$$f(a)=A_0,\quad f'(a)=A_1,\quad f''(a)=1.2.A_2,$$
$$f'''(a)=1.2.3.A_3,\quad \ldots f^{(n-1)}(a)=1.2.3\ldots(n-1)A_{n-1}.$$

Danach sind die Coefficienten in (A) vollständig bestimmt, und wir haben:

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1}f'(a)+\frac{x^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+x^n\psi(x). \quad (C)$$

Jetzt kömmt es darauf an, die Funktion $\psi(x)$ genauer kennen

zu lernen. Zu dem Ende setzen wir statt der Gleichung (C) zwei Ungleichungen an:

$$\left.\begin{aligned} f(a+x) - f(a) - \frac{x}{1} f'(a) - \frac{x^2}{1.2} f''(a) - \ldots \\ - \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) - P.x^n \end{aligned}\right\} > 0, \quad \text{(D)}$$

$$\left.\begin{aligned} f(a+x) - f(a) - \frac{x}{1} f'(a) - \frac{x^2}{1.2} f''(a) - \ldots \\ - \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) - Q.x^n \end{aligned}\right\} < 0. \quad \text{(E)}$$

Unter P und Q sollen passend gewählte constante Grössen verstanden werden, die nach der für $f(a+x)$ gemachten Voraussetzung jedenfalls endlich sind. Auf der linken Seite von (D) steht eine Funktion, die für $x = 0$ selbst den Werth Null hat. Setzt man nun fest, dass der Differentialquotient dieser Funktion positiv sein soll für positive x, so ist für $x > 0$ die Ungleichung (D) erfüllt. Also hat man zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} f'(a+x) - f'(a) - \frac{x}{1} f''(a) - \ldots \\ - \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} f^{(n-1)}(a) - nP.x^{n-1} \end{aligned}\right\} > 0.$$

Hier lässt sich dieselbe Bemerkung wiederholen. Fährt man in derselben Weise fort, so gelangt man zu dem Schluss, dass für positive x die Ungleichung (D) erfüllt ist, wenn man setzt:

$$f^{(n)}(a+x) - 1.2.3\ldots n.P > 0. \quad \text{(F)}$$

Ebenso kömmt für positive x die Ungleichung (E) zu Stande, wenn

$$f^{(n)}(a+x) - 1.2.3\ldots n.Q < 0 \quad \text{(G)}$$

genommen wird. Hiernach braucht man nur für P den kleinsten und für Q den grössten von allen den Werthen anzusetzen, welche die Funktion

$$\frac{f^{(n)}(a+x)}{1.2.3\ldots n}$$

für positive x überhaupt annimmt.

Nach unserer Voraussetzung verläuft aber die eben genannte Funktion auf dem vorgeschriebenen Werthegebiete durchaus endlich und stetig. Sie nimmt also, wenn man x von Null bis zu seinem äussersten Werthe stetig wachsen lässt, jeden Werth, der zwischen P und Q liegt, mindestens einmal an. Man kann aber aus den Ungleichungen (D) und (E) eine Gleichung herleiten, indem man statt des zu kleinen P und des zu grossen Q einen passenden Zwischenwerth M in Rechnung bringt. Dieser Zwischenwerth lässt sich, wie eben bemerkt, in der Form darstellen:

$$M = \frac{f^{(n)}(a + \Theta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

wenn unter Θ ein freilich unbekannter, aber jedenfalls vorhandener positiver echter Bruch verstanden wird. Zugleich sehen wir, dass in der Gleichung (C) jetzt

$$\psi(x) = \frac{f^{(n)}(a + \Theta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

zu setzen ist, und dass diese Funktion in der That keinen Nenner enthält, der für $x = 0$ in Null überginge. Danach haben wir die Entwickelung:

$$f(a + x) = f(a) + \frac{x}{1} f'(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + R, \quad (30)$$

$$R = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(a + \Theta x).$$

Dies ist die Reihe von Taylor. Sie ist abgeleitet unter der Voraussetzung, dass die Funktion $f(a + x)$ und ihre Differentialquotienten von der ersten bis zu der n^{ten} Ordnung einwerthig, endlich und stetig variabel verlaufen auf einem Gebiete, welches die Stelle $x = 0$ in sich enthält.

Wird in (30) speciell $a = 0$ genommen, so erhalten wir die Reihe von Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots$$
$$\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R_1, \quad (31)$$
$$R_1 = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\Theta x).$$

Sie ist gültig, wenn die Funktion $f(x)$ und ihre Differentialquotienten von der ersten bis zur n^{ten} Ordnung einwerthig, endlich und stetig variabel verlaufen auf einem Gebiete, welches die Stelle $x = 0$ in sich enthält.

Ist in (30) lim $R = 0$ für $n = \infty$ und die oben ausgesprochene Bedingung erfüllt für die Funktion und ihre sämmtlichen Differentialquotienten, so darf man die unendliche Reihe ansetzen:

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1} f'(a) + \frac{x^2}{1.2} f''(a) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots \quad (30^*)$$

Ebenso darf man in (31) die unendliche Reihe nehmen, wenn lim $R_1 = 0$ für $n = \infty$ und wenn die oben ausgesprochene Bedingung für die Funktion und ihre sämmtlichen Differentialquotienten erfüllt ist. Dann hat man:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots \quad (31^*)$$

Die Bedingung: lim $R = 0$, resp. lim. $R_1 = 0$ für $n = \infty$ kömmt auf dasselbe hinaus, als wenn man sagt: Die unendlichen Reihen dürfen angesetzt werden, wenn sie convergiren.

Aufgaben.

417) Das Binomium. Zu $f(x) = x^n$ gehören die Werthe $f(a) = a^n$, $f'(a) = n a^{n-1}$, $f''(a) = n(n-1) a^{n-2}$, $f'''(a) = n(n-1)(n-2) a^{n-3}$ u. s. w. Nach der Reihe von Taylor erhält man $f(x+a)$ oder:

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} \frac{x}{1} + n(n-1) a^{n-2} \frac{x^2}{1.2} + n(n-1)(n-2) a^{n-3} \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

418) Die Reihe für $(1+x)^{-n}$ zu finden. $f(x)=x^{-n}$, $f(1)=1$, $f'(1)=-n$, $f''(1)=n(n+1)$, $f'''(1)=-n(n+1)(n+2)$ u. s. w.

$$(1+x)^{-n}=1-n\frac{x}{1}+n(n+1)\frac{x^2}{1.2}-n(n+1)(n+2)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

419) Man entwickele den Ausdruck $\sqrt{1+x}$ in eine Reihe.

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ u. s. w.; daher $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$, $f''(1)=-\frac{1}{4}$ u. s. w.

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6}-\ldots.$$

420) Man entwickele die Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots.$$

421) Wenn $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$ ist, soll $f(x+2)$ entwickelt werden. Es ist $f(2)=-1$, $f'(2)=4$, $f''(2)=6$, $f'''(2)=6$; $f(x+2)=-1+4x+3x^2+x^3$.

422) Nach der Formel von Maclaurin soll entwickelt werden:

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{a}{b}+\frac{b-a}{b^2}x+\frac{a-b}{b^3}x^2+\frac{b-a}{b^4}x^3+\ldots.$$

423) Die Reihe für a^x. $f(x)=a^x$, $f(0)=1$, $f'(0)=\lg a$, $f''(0)=(\lg a)^2$, $f'''(0)=(\lg a)^3$ u. s. w.

$$a^x=1+\frac{x}{1}\lg a+\frac{x^2}{1.2}(\lg a)^2+\frac{x^3}{1.2.3}(\lg a)^3+\ldots.$$

Daraus geht die Reihe für e^x hervor, wenn man e statt a setzt.

424) Die Reihe für $\lg(1+x)$. $f(x)=\lg x$, $f(1)=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=-1$, $f'''(1)=2$, $f''''(1)=-2.3$, $f'''''(1)=2.3.4$ u. s. w.

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots.$$

Wird darin $-x$ statt x gesetzt, so entsteht:

$$\lg(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\ldots.$$

$$\lg\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots.\right).$$

Durch Substitution von $x = \frac{1}{2z+1}$ geht die vorstehende in folgende Formel über:

$$\lg(z+1) = \lg z + 2\left[\frac{1}{(2z+1)} + \tfrac{1}{3}\frac{1}{(2z+1)^3} + \tfrac{1}{5}\frac{1}{(2z+1)^5} + \ldots\right].$$

425) Nachzuweisen, dass:

$$(1+e^x)^3 = 8 + 12\frac{x}{1} + 24\frac{x^2}{1.2} + 54\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

426) Die Reihe für $\sin(x+a)$. $f(x) = \sin x$, $f(a) = \sin a$, $f'(a) = \cos a$, $f''(a) = -\sin a$ u. s. w.

$$\sin(x+a) = \sin a + \cos a\frac{x}{1} - \sin a\frac{x^2}{1.2} - \cos a\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Für $a = 0$ wird:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

427) Die Reihe für $\cos(x+a)$. $f(x) = \cos x$, $f(a) = \cos a$, $f'(a) = -\sin a$, $f''(a) = -\cos a$, $f'''(a) = \sin a$ u. s. w.

$$\cos(a+x) = \cos a - \sin a\frac{x}{1} - \cos a\frac{x^2}{1.2} + \sin a\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Für $a = 0$ erhält man:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

428) Auf ähnliche Weise entwickelt man:

$$\operatorname{tg}(a+x) = \operatorname{tg} a + \frac{1}{\cos^2 a}\cdot\frac{x}{1} + \frac{2\operatorname{tg} a}{\cos^2 a}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{2(1+3\operatorname{tg}^2 a)}{\cos^2 a}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Das Gesetz der Coefficienten ist hier nicht übersichtlich.

429) Nach der Formel von Maclaurin soll $f(x) = \cos^2 x$ entwickelt werden.

$$\cos^2 x = 1 - 2\frac{x^2}{1.2} + 8\frac{x^4}{1.2.3.4} - 32\frac{x^6}{1.2\ldots.6} + \ldots.$$

430) Mittelst der Reihe von Maclaurin ist die Formel von Moivre abzuleiten. Gegeben ist $f(x) = (\cos x + i\sin x)^n$. Man findet: $f'(x) = n(\cos x + i\sin x)^{n-1}(-\sin x + i\cos x) = ni(\cos x + i\sin x)^n = ni.f(x)$, und daraus folgt, dass $f''(x) = ni.f'(x) = (ni)^2 f(x)$ ist u. s. w. Nun ist $f(0) = 1$, $f'(0) = ni$, $f''(0) = -n^2$, $f'''(0) = -n^3 i$ u. s. w. und:

$$(\cos x + i \sin x)^n = 1 - \frac{n^2 x^2}{1.2} + \frac{n^4 x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$
$$+ i\left(\frac{nx}{1} - \frac{n^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right),$$

oder nach den für $\sin x$ und $\cos x$ entwickelten Reihen:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

431) Die Funktion $f(x) = \arcsin x$ soll in eine Reihe entwickelt werden. Weil die höheren Differentialquotienten wenig einfache Formen annehmen, setzen wir:

$$\arcsin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

und haben sofort $A = 0$ für $x = 0$. Wird auf beiden Seiten differentiirt, so entsteht:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots.$$

Für die linke Seite liefert der binomische Satz die Reihe:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

und so erhält man durch Vergleich:

$$B = 1, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2.3}, \quad E = 0 \text{ u. s. w., oder:}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Für $x = 1$ wird $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

432) Die Reihe für $\operatorname{arc\,tg} x$. Setzt man:

$$\operatorname{arc\,tg} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.,$$

so ist für $x = 0$ auch $A = 0$ und:

$$\frac{1}{1 + x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots.$$

Da nun weiter:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.,$$

so findet man durch Vergleich, dass:

$$B = 1, \quad C = 0, \quad D = -\tfrac{1}{3}, \quad E = 0 \text{ u. s. w.}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Für $x = 1$ ist $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}$, und man hat:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \cdots.$$

Werden die Glieder paarweise vereinigt, so entsteht die bessere Form:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \cdots\right).$$

Setzt man $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, so ist $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$ und daher $(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4}$. Man darf mithin setzen:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \cdots.$$

In allen vorstehenden Aufgaben ist jedesmal die Convergenz der unendlichen Reihe zu untersuchen.

Zum Schlusse dieses Kapitels stellen wir noch einige später nothwendige Formeln auf. Wird in der Reihe für e^x an die Stelle von x die imaginäre Variabele ix gesetzt, so wird

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3..4} - \frac{x^6}{1.2....6} + \cdots + i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\right),$$

oder es ist $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, und allgemein:

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx). \qquad (32)$$

Da nun auch $e^{inx} = (\cos x + i\sin x)^n$ ist, so erhalten wir leicht durch Vergleich die Formel von Moivre wieder. Aus:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \text{ und } e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

folgt leicht:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad (33)$$

worin auch nx statt x gesetzt werden darf.

Tritt ebenso in Aufgabe Nr. 424 an die Stelle von x die imaginäre Variabele ix, so erhält man:

$$\lg\frac{1+ix}{1-ix} = 2i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right),$$

woraus dann unter Berücksichtigung der Reihe für $\operatorname{arc\,tg} x$ folgt:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+ix}{1-ix}. \qquad (34)$$

Funktionen von zwei unabhängigen Variabelen.

§ 12. Entwickelung der Differentialquotienten.

Sind in der gegebenen Funktion $z = f(x, y)$ die beiden Variabelen x und y unabhängig von einander, so können die Werthe, welche z nach einander annimmt, wenn man den Variabelen x und y immer andere und andere Werthe beilegt, auf folgende Weise graphisch veranschaulicht werden:

In der gewöhnlichen Coordinatenebene benutzt man in bekannter Weise das gewählte x und y zur Festlegung eines Punktes D (Fig. 8), errichtet in D ein Perpendikel zur Coordinatenebene und trägt darauf den Werth von z ab, welcher den gewählten Werthen für x und y entspricht. So erhält man den Punkt M im Raume. Bei mehrwerthigen Funktionen findet man mehr als einen Punkt auf der nämlichen Senkrechten. Der Inbegriff aller Lagen, welche der Punkt M vermöge der Gleichung $z = f(x, y)$ annehmen kann, ist eine Oberfläche.

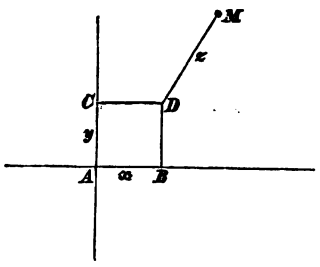


Fig. 8.

Eine Aenderung des Funktionswerthes $z = f(x, y)$ kann nun auf dreierlei Weise veranlasst werden, und zwar:

1) dadurch, dass nur x übergeht in x_1,

2) dadurch, dass nur y übergeht in y_1,

3) dadurch, dass gleichzeitig x und y übergehen in x_1 und y_1.

Demgemäss müssen auch 3 verschiedene Arten von Differenzen der Funktionswerthe unterschieden werden, nämlich:

1) $f(x_1, y) - f(x, y)$; 2) $f(x, y_1) - f(x, y)$; 3) $f(x_1, y_1) - f(x, y)$.

Dass man die Werthe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim \frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{x_1 - x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}$$

die partiellen Differentialquotienten der Funktion nennt, wurde Pg. 15 und 16 erörtert, wo sich auch der Modus ihrer Ableitung angegeben findet. Wir haben uns desshalb hier nur noch mit derjenigen Veränderung dz zu befassen, welche der Funktionswerth z dadurch erfährt, dass sich die beiden Variabelen x und y gleichzeitig um die verschwindend kleinen Werthe dx und dy ändern. Wenn den beliebig, aber doch ganz bestimmt gewählten Werthen x, y und x_1, y_1 die Funktionswerthe z und z_1 zugehören, so ist $(z_1 - z) = f(x_1, y_1) - f(x, y)$, oder:

$$(z_1 - z) = \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{(x_1 - x)}(x_1 - x) + \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{(y_1 - y)}(y_1 - y).$$

Durch den Uebergang zu den Grenzen wird dieser Ausdruck in den folgenden übergeführt;

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \qquad (35)$$

Wird diese Formel nach ihrer eigenen Anleitung nochmals differentiirt und dabei berücksichtigt, dass dx und dy constante Werthe sind, so entsteht:

$$d^2z = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)}{\partial y} dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Aufgaben.

433) $z = 3x^2 + xy^2 + y^4$ $\quad dz = (6x + y^2)dx + (2xy + 4y^3)dy$

434) $z = \frac{xy}{x+y}$ $\quad " = \frac{x^2 dy + y^2 dx}{(x+y)^2}$

435) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ $\quad " = \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

436) $z = (2x - 5y^2)^3$ $\quad " = 3(2x - 5y^2)^2(2dx - 10y\,dy)$

437) $z = y \sin x + \cos(x - y)$ $\quad " = [y \cos x - \sin(x - y)]\,dx + [\sin x + \sin(x - y)]\,dy$

438) $z = (\sin 3x + \cos y)^2$

$$dz = 2(\sin 3x + \cos y)(3\cos 3x\,dx - \sin y\,dy)$$

439) $z = x^2 - axy + y^2 \quad d^2z = 2(dx^2 - a\,dx\,dy + dy^2)$

440) $z = y^2 e^x \quad d^2z = e^x(y^2 dx^2 + 4y\,dx\,dy + 2dy^2).$

§. 13. Maxima und Minima von Funktionen mit zwei unabhängigen Variabelen.

Wenn auf der Eingangs des vorhergehenden Paragraphen erwähnten Funktionsoberfläche der Punkt M von der xy-Ebene einen Abstand z hat, der algebraisch grösser ist als für alle Punkte seiner unmittelbarsten Umgebung, so nennt man ihn einen Maximalpunkt, im entgegengesetzten Falle ist er ein Minimalpunkt. Der zugehörige Funktionswerth z wird dann ein Maximum, beziehungsweise ein Minimum genannt. Werden durch einen solchen Punkt M nach beliebigen Richtungen Ebenen senkrecht zur xy-Ebene gelegt, so entstehen auf der Oberfläche Schnittcurven, und es müssen alle Tangenten, welche durch M an diese Curven gelegt werden können, parallel zur xy-Ebene sein. Legen wir in der Achsenebene beliebige Curven durch den Punkt D, so entsprechen diesen ebenfalls beliebige Gleichungen zwischen den Variabelen x und y. Jedem Punkte einer solchen Curve entspricht ein bestimmtes Werthpaar x und y, und diesen wieder ein ganz bestimmtes z, woraus dann folgt, dass jeder Curve in der xy-Ebene eine ganz bestimmte Curve auf der Funktionsoberfläche entsprechen muss. Kann nun ein Werth z so gefunden werden, dass er für alle diese Funktionscurven ein Maximum oder ein Minimum vorstellt, so ist er auch ein Maximum oder ein Minimum der Funktion. In §. 10 haben wir Werthe für x und y ermittelt, für welche $z = f(x, y)$ ebenfalls ein Maximal- oder ein Minimalwerth wurde, doch mussten die gefundenen Werthe noch weiter der Bedingung genügen: $\varphi(x, y) = 0$. Daher unterscheidet sich unsere jetzige Aufgabe von der damaligen nur durch den Umstand, dass die erwähnte Bedingung ganz fehlt, d. h. die Abhängigkeit zwischen x und y beliebig gewählt werden darf. Fügen wir desshalb der gegebenen Funktion

$z = f(x, y)$ noch die willkürliche Bedingung $\varphi(x, y) = 0$, oder statt ihrer noch die beiden willkürlichen Bedingungen: $x = \chi(t)$, $y = \psi(t)$ hinzu, so ist diese Aufgabe auf die frühere zurückgeführt. Hierdurch ist z in eine Funktion der einzigen Variabelen t umgewandelt, und es muss für den Fall eines Maximums oder Minimums:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

sein. Bei der Willkürlichkeit von $\frac{dx}{dt} = x'$ und $\frac{dy}{dt} = y'$ kann diese Bedingung nur erfüllt werden, wenn:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (36)$$

Aus diesen Gleichungen gehen diejenigen Werthe von x und y hervor, welche z zu einem Maximum oder Minimum machen. Diese selbst werden, wie gewöhnlich, durch das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten von einander unterschieden. Es ist:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + x' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' \right) + y' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' \right).$$

Gemäss der Relationen (36) wird:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2.$$

Die zweiten Differentialquotienten sind hier constante Grössen, weil sie mit den aus (36) hervorgehenden Werthen von x und y zu bilden sind. Wir nennen sie a, b und c und haben:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = \frac{(ax' + by')^2 + (ac - b^2) y'^2}{a}.$$

Der letzte Ausdruck bleibt für alle Werthe von x' und y' positiv, wenn $(ac - b^2) > 0$ und zugleich $a > 0$ ist. Die Funktion ist dann ein Minimum. Ist dagegen $(ac - b^2) > 0$ und $a < 0$, so kann der Ausdruck nur negativ werden, wie man x' und y' auch wählen mag. Die Funktion ist ein Maximum. Ist endlich $(ac - b^2) < 0$, so kann der Werth durch geeignete Wahl von x' und y' nach Belieben positiv oder negativ gemacht werden.

Hiernach ist es für Maximal- oder Minimalwerthe ein gemeinsames Erforderniss, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ ist, und es ist dann:

z ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$,

z ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$.

Aufgaben.

441) $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$ Min. für $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{7}{3}$

442) $z = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$ „ „ $x = 2\frac{1}{2}$, $y = 5$

443) $z = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ „ „ $x = y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

444) $z = (x+y)^2 - (x+5y+xy)$ „ „ $x = -1$, $y = 3$

445) $z = xy^2(a-x-y)^3$ Max. für $x = \frac{a}{6}$, $y = \frac{a}{3}$.

446) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ „ „ $x = y = 60^0$

447) $z = \sin x \sin y \sin(a-x-y)$ „ „ $x = y = \frac{a}{3}$

448) $z = x^3 - 3axy + y^3$ „ „ $x = y = a$.

449) Das Volumen eines rechtwinkeligen Parallelepipedes ist $= a^3$. Wie gross müssen die Kanten sein, wenn die Oberfläche ein Min. werden soll?

Der Körper ist ein Würfel, dessen Kanten $= a$.

450) Eine Zahl a soll in 3 solche Theile zerlegt werden, dass deren Produkt ein Max. wird.

$z = xy(a-x-y)$ wird Max., wenn jeder Theil $= \frac{a}{3}$ ist.

451) In einen Kreis soll das an Fläche grösste Dreieck gezeichnet werden.

Die zu den Seiten gehörenden Centriwinkel mögen x, y und $(360^0 - x - y)$ heissen, so wird $F = \frac{1}{2}r^2[\sin x + \sin y + \sin(360^0 - x - y)]$ ein Max., wenn die 3 Centriwinkel gleich, mithin auch die Dreieckseiten gleich sind.

452) Die Summe der 3 Seiten eines Dreiecks ist $= 2s$. Wie muss man die einzelnen Seiten wählen, wenn die Fläche ein Max. sein soll?

$F = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$ wird ein Max., wenn die 3 Seiten gleich sind.

453) Aus einer Kugel soll das an Volumen grösste rechtwinkelige Parallelepiped geschnitten werden.

Kugelhalbmesser $= r$, die halben Kanten x, y, u, so besteht die Relation: $x^2 + y^2 + u^2 = r^2$. Das Volumen $s = 8xyu$ wird Max. für $x = y = u = r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

§ 14. Homogene Funktionen.

Wir sagen, der Ausdruck ax^2y^3 sei vom fünften Grade (Ordnung, Dimension), weil die Exponentensumme der beiden Variabelen 5 beträgt, und nennen $\frac{a(x^4 + y^2x^2)}{x+y}$ einen Ausdruck dritten Grades, weil die Differenz aus der Exponentensumme des Zählers und Nenners gleich 3 ist. Dass der Grad eines Ausdrucks auch eine negative oder gebrochene Zahl sein kann, ist selbstverständlich. Sind die einzelnen Theile einer Funktion von gleich hohem Grade, so ist die Funktion homogen. Zur sicheren Beurtheilung, ob eine Funktion die erwähnte Eigenschaft besitze, dient das folgende Kriterium: Ersetzt man die Variabelen x, y, z u. s. w. durch die Werthe tx, ty, tz, wobei t einen beliebigen Factor vorstellt, so muss man für eine Funktion vom n^{ten} Grade die Relation finden:

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z). \qquad (37)$$

1. Beispiel: $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 7y^2$:

$$f(tx, ty) = 5t^2x^2 - 2txty + 7t^2y^2 = t^2 f(x, y).$$

2. Beispiel: $f(x, y, z) = \frac{x^3z^{\frac{1}{2}} - y^4x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}z^3}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + z}$

$$f(tx, ty, tz) = \frac{t^3x^3t^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} - t^4y^4t^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}t^2z^3}{t^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + tz} = t^{\frac{1}{2}} f(x, y, z).$$

Euler's Lehrsatz über homogene Funktionen. Wir setzen in (37) $tx = u$, $ty = v$, $tz = w$, und differentiiren die beiden Seiten nach t:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}=nt^{n-1}f(x,y,z),$$

oder, weil $\frac{du}{dt}=x$, $\frac{dv}{dt}=y$, $\frac{dw}{dt}=z$ ist,

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot z=nt^{n-1}f(x,y,z).$$

Lässt man darin die willkürliche Grösse t in 1 übergehen, so verwandelt sich $\frac{\partial f}{\partial u}$ in $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ in $\frac{\partial f}{\partial z}$ und man erhält:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=n\cdot f(x,y,z). \qquad (38)$$

Diese Formel stellt den Satz von Euler dar.

1. Beispiel: $f=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2$;

$$\frac{2x}{a^2}\cdot x+\frac{2y}{b^2}\cdot -2z\cdot z=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2\right).$$

2. Beispiel: $f=x^3+2ax^2y-ay^3=0$;

$$(3x^2+4axy)x+(2ax^2-3ay^2)y=3(x^3+2ax^2y-ay^3).$$

3. Beispiel: $f=\sqrt{x^3-y^2z}=R$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2}{2R},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2yz}{2R},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-y^2}{2R},$$

$$\frac{3x^3-2y^2z-y^2z}{2R}=\tfrac{3}{2}\left(\frac{x^3-y^2z}{R}\right)=\tfrac{3}{2}\sqrt{x^3-y^2z}.$$

4. Beispiel: $f=\frac{xy}{x^3+y^3}$;

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y^4x+x^4y}{(x^3+y^3)^2}=-\frac{xy}{x^3+y^3}.$$

5. Beispiel: $f=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{z}$;

$$-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot x+\tfrac{1}{2}\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{z}\cdot y-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{z^2}\cdot z=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{z}\right).$$

§ 15. Die Reihen von Taylor und Maclaurin für Funktionen mit zwei unabhängigen Variabelen.

Ersetzen wir in $f(x,y)$ die Variabele x durch $x+\xi$ und y durch $y+\eta$, so kann die Funktion in eine Reihe nach Potenzen

und Produkten von ξ und η entwickelt werden. Um diese Entwickelung auf § 11 zurückzuführen, setzen wir $\xi = r.t$, $\eta = s.t$ und $f(x + rt, y + st) = F(t)$, indem wir uns unter x, y, r, s bestimmt gewählte Werthe vorstellen. Nach dem Maclaurin'schen Satze ist jetzt:

$$F(t) = F(0) + F'(0)\frac{t}{1} + F''(0)\frac{t^2}{1.2} + F'''(0)\frac{t^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Bei der Bildung der Funktionen F', F'' u. s. w. ist es zweckmässig, $x + rt = u$, $y + st = v$ zu setzen, wodurch $F(t)$ in $f(u, v)$ umgewandelt wird. Zugleich ist $\frac{du}{dt} = r$, $\frac{dv}{dt} = s$, und die höheren Differentialquotienten verschwinden. So ist:

$$F(t) = f(u, v)$$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$F'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\left(\frac{du}{dt}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\partial v}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{dv}{dt} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial u\partial v^2}\frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

u. s. w. $\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}\left(\frac{dv}{dt}\right)^3$

Setzt man $t = 0$, so geht $f(u, v)$ in $f(x, y)$ über und ebenso verwandeln sich die partiellen Differentialquotienten von f nach u und v in die entsprechenden Funktionen nach x und y. So entstehen die Werthe $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ u. s. w. und es gibt:

$$F(t) = f(x, y) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}r + \frac{\partial f}{\partial y}s\right]\frac{t}{1} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}r^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}rs + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}s^2\right]\frac{t^2}{1.2}$$
$$+ \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}r^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}r^2 s + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}rs^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}s^3\right]\frac{t^3}{1.2.3}$$

u. s. w.

Werden nun für $F(t)$, rt, st die Werthe wieder gesetzt, die sie vertreten, so ergibt sich:

$$f(x + \xi, y + \eta) = f(x, y) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\xi^2}{1.2} + \right.$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\xi\eta}{1.2} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\eta^2}{1.2}\right] + \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\xi^3}{1.2.3} + \right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{\xi^2\eta}{1.2.3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{\xi\eta^2}{1.2.3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\eta^3}{1.2.3}\right] + \quad (39)$$

u. s. w.

Wird darin $x = 0$ und $y = 0$ gesetzt, so erhält man die Reihe für $f(\xi, \eta)$, welche in die Reihe $f(x, y)$ übergeht, wenn ξ mit x und η mit y vertauscht wird.

Aufgaben.

454) Wenn $f(x, y) = x^3 + xy^2$ ist, so soll $f(x + \xi, y + \eta)$ allgemein entwickelt und dann $\xi = 1$, $\eta = 2$ gesetzt werden.

$$f(x+1, y+2) = [x^3+y^2x] + [3x^2+y^2+4xy] + [7x+4y] + 5.$$

455) Gegeben ist $f(x, y) = \sin x \cos y$. Es soll $f(x + \delta, y + \delta)$ in eine Reihe entwickelt werden.

$$f(x + \delta, y + \delta) = \sin x \cos y + \cos(x + y) \cdot \frac{\delta}{1} - 2 \sin(x + y) \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} - 4 \cos(x + y) \frac{\delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots$$

456) Es soll die Funktion $a^x \lg(1 + y)$ in eine Reihe entwickelt werden.

Man lässt x in $(x + \xi)$, y in $(y + \eta)$ übergehen, entwickelt die Funktionen nach Potenzen und Produkten von ξ und η, setzt dann in den als Coefficienten auftretenden Differentialquotienten $x = 0$ und $y = 0$ und vertauscht hierauf ξ mit x und η mit y. So erhält man:

$$a^x \lg(1+y) = y + xy \lg a - \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{x^2 y}{2} (\lg a)^2 - \frac{xy^2}{2} \lg a + \tfrac{1}{3}y^3 + \ldots$$

Integralrechnung.

Unbestimmte Integrale.

§ 1. Die einfachen Integralformen.

Die Integralrechnung hat zunächst die Aufgabe zu lösen, zu einem gegebenen Differentialquotienten die ursprüngliche Funktion wieder herzustellen, oder allgemeiner, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ diejenige Funktion $F(x)$ zu finden, deren Differentialquotient $f(x)$ ist. Wir nennen dann F das Integral von f und sagen:

$$\int f(x)\,dx = F(x), \quad \text{wenn } \frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

ist. Da nun der Differentialquotient von $F(x)$ unverändert bleibt, wenn zu $F(x)$ eine beliebige Constante C zugefügt wird, so sind zu einer vorgelegten Funktion unzählig viele Integrale möglich, doch können ihre Werthe nur um eine additive Constante verschieden sein.

Eine Anzahl einfacher Integralformen wird erhalten, wenn man die in §. 1 zusammengestellten Differentialformen kurzweg umkehrt und schreibt:

1) $\int a\,dx = ax + C$

2) $\int ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\int \frac{1}{x}\,dx = \lg x + C$

4) $\int e^x\,dx = e^x + C$

5) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\lg a} + C$

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

10) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,cotg} x + C_1$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sin} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C_1.$

Sind u und v Funktionen von x, so ist $\frac{d(u+v)}{dx} = u' + v'$, und daher muss umgekehrt:

$$\int (u' + v')\,dx = u + v = \int u'\,dx + \int v'\,dx$$

sein, oder: **Eine Summe integrirt man, indem man jeden Theil integrirt.**

Ist a constant, so ist $d(a.u) = a.u'$ und darum auch:

$$\int a.u'\,dx = a.u = a\int u'\,dx.$$

Ein constanter Factor unter dem Integralzeichen darf vor dasselbe gestellt werden.

Aufgaben.

Die beliebige Constante ist den Lösungen nicht zugefügt.

12) $\int 7x^4\,dx = \frac{7x^5}{5}$

13) $\int \frac{2}{3x^5}\,dx = -\frac{1}{6x^4}$

14) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$

16) $\int 5\sqrt[3]{x^2}\,dx = 3\sqrt[3]{x^5}$

17) $\int \frac{a}{\sqrt[4]{5x^3}}\,dx = 4a\sqrt[4]{\frac{x}{5}}$

18) $\int (a+bx)\,dx = ax + \frac{bx^2}{2}$, oder $= \frac{(a+bx)^2}{2b}$, indem sich beide Werthe nur durch eine Constante unterscheiden.

19) $\int \left(5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx = \frac{5x^3}{3} - 3x^2 + 3x - 2\lg x - \frac{5}{x}$

20) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x}\,dx = \frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \lg x$

21) $\int (3 + 2\sqrt[4]{x})^3\,dx = 27x + \frac{216}{5}x^{\frac{5}{4}} + 24x^{\frac{3}{2}} + \frac{32}{7}x^{\frac{7}{4}}$

22) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{8}{17}\sqrt[12]{125x^{17}}$

23) $\int \frac{3 + 5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}\,dx = -\frac{6}{\sqrt{x}} + 30\sqrt[6]{x}\,.$

Die Methode der Substitution. Sieht man, dass die Funktion unter dem Integralzeichen ein sogenanntes vollständiges Differential, d. h., der Differentialquotient einer einfachen und bekannten Funktion, multiplicirt mit dx, ist, so kann das Integral sofort hingeschrieben werden. Gewöhnlich muss aber diese Form, wenn sie überhaupt möglich ist, erst durch Transformation herbeigeführt werden, indem man $x = \varphi(z)$ setzt und den gegebenen Differentialquotienten nach x in den Differentialquotienten der nämlichen Funktion, aber genommen nach z, umwandelt. Es hat dies auf folgende Weise zu geschehen: Wenn $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$ ist, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, oder $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$. Bei dem Integral $y = \int f(x)\,dx$ ist $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Wird nun $x = \varphi(z)$ gesetzt, so ist $\frac{dy}{dz} = f[\varphi(z)] \cdot \frac{dx}{dz}$ und:

$$y = \int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)] \cdot \frac{dx}{dz}\,dz\,. \qquad (1)$$

Die Anwendung dieser Formel soll an einigen Beispielen erläutert werden.

24) $y = \int (a + bx)^n dx; \quad a + bx = z, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{b};$

$$y = \frac{1}{b}\int z^n dz = \frac{1}{b}\,\frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b}$$

25) $y = \int \frac{1}{a+bx}\,dx; \quad a + bx = z;$

$$y = \frac{1}{b}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{b}\lg z = \frac{1}{b}\lg(a+bx)$$

26) $y = \int \sqrt{a+bx}\,dx; \quad a + bx = z^2, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2z}{b};$

$$y = \frac{2}{b}\int z^2 dz = \frac{2}{b}\cdot\frac{z^3}{3} = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

27) $y = \int e^{mx} dx; \quad mx = z, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{m};$

$$y = \frac{1}{m}\int e^z dz = \frac{e^z}{m} = \frac{e^{mx}}{m}$$

28) $y = \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx; \quad x = az.$ Statt nun zu setzen: $\frac{dx}{dz} = a,$ ist es gebräuchlich zu schreiben: $dx = a\,dz;$

$$y = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

29) $y = \int \sin ax\,dx; \quad ax = z, \quad dx = \frac{1}{a}\,dz;$

$$y = \frac{1}{a}\int \sin z\,dz = -\frac{1}{a}\cos z = -\frac{1}{a}\cos ax$$

30) $y = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx;$

$$y = \int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{arc\,tg}(x+2).$$

Die Integration nach Theilen. Sind u und v Funktionen von x, so ist $\frac{d(u.v)}{dx} = v.u' + u.v'$, und daraus folgt sofort: $\int v.u'\,dx + \int u.v'\,dx = u.v$, wofür man auch setzen kann:

$$\int u.v'\,dx = u.v - \int v.u'\,dx. \qquad (2)$$

Diese Formel hat folgenden Sinn: Soll ein Produkt $u.v'$, dessen

zweiter Factor v' ein vollständiger Differentialquotient ist, integrirt werden, so integrirt man zunächst nur diesen Factor v' und bildet aus dem Integral v und dem unveränderten ersten Faktor u das Produkt $u.v$; dann wird u differentiirt, das Produkt $u'.v$ gebildet und $\int v.u'dx$ von $u.v$ abgezogen. Durch dieses Verfahren wird nur ein Theil des ganzen Integrales fertig erhalten, während der andere Theil sich noch unter dem Integralzeichen befindet. Ist dieses übrig gebliebene Integral $\int v.u'dx$ aber einfacher als das gegebene, so ist die Methode zweckmässig; besonders ist sie dies dann, wenn durch wiederholte Anwendung das zurückbleibende Integral immer einfacher und schliesslich auch in ausführbarer Form erhalten wird.

Geht u in eine Constante a über, so entsteht:

$$\int a.v'dx = a.v = a\int v'dx.$$

Wir lassen zunächst zu (2) einige Beispiele folgen.

31) $y = \int x^3 e^x dx$; $u = x^3$, $v' = e^x$;

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$; $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$;
$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$ Stellen wir nun noch das Ganze zusammen und addiren

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx \\
-3\int x^2 e^x dx &= -3x^2 e^x + 2.3\int x\, e^x dx \\
2.3\int x\, e^x dx &= 2.3x\, e^x - 1.2.3\int e^x dx \\
-1.2.3\int e^x dx &= -1.2.3\, e^x \\
\int x^3 e^x dx &= e^x(x^3 - 3x^2 + 2.3x - 1.2.3).
\end{aligned}$$

32) $\int x^4(1+x)^3 dx = \frac{x^5}{5}(1+x)^3 - \frac{3}{5}\int x^5(1+x)^2 dx$;

$\int x^5(1+x)^2 dx = \frac{x^6}{6}(1+x)^2 - \frac{2}{6}\int x^6(1+x)\,dx$;

$\int x^6(1+x)\,dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8}$;

$\int x^4(1+x)^3 dx = \frac{x^5}{5}(1+x)^3 - \frac{3x^6}{5.6}(1+x)^2 + \frac{3.2}{5.6}\left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8}\right)$.

33) $\int x.\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$.

34) $\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \,.\, \cos x\,dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x\,dx$

$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx;$

$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cos x + \int 1\,.\,dx;$

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}$

35) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x.$

36) $y = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx;$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - y;$

$2y = -x\sqrt{1-x^2} + \text{arc sin}\, x,$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc sin}\, x$

37) $\int \frac{1}{x}\lg x\,dx = (\lg x)^2 - \int \frac{1}{x}\lg x\,dx;\quad \int \frac{1}{x}\lg x\,dx = \frac{1}{2}(\lg x)^2.$

38) $\int x^3 \lg x\,dx = \frac{x^4}{4}\lg x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\left(\lg x - \frac{1}{4}\right)$

39) $\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx;$

$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx;$

$\int x^2 \cos x\,dx = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x$

40) $\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx;$

$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx.$

Durch Subtraction und Addition entsteht:

$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$ bezw.

41) $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$

42) $\int 1\,.\,\text{arc sin}\, x\,dx = x\,\text{arc sin}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= x\,\text{arc sin}\, x + \sqrt{1-x^2}.$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lg f(x) + C \qquad (3)$$

ist nur die Umkehrung von Aufgabe 195 Diff. R. und heisst in Worten: Ist der Zähler eines Bruches der Differentialquotient des Nenners, so ist das Integral des Bruches der natürliche Logarithmus des Nenners.

43) $\int \frac{a}{b+cx}\,dx = \frac{a}{c}\int \frac{c}{b+cx}\,dx = \frac{a}{c}\lg(b+cx)$

44) $\int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n}\,dx = \frac{1}{nb}\lg(a+bx^n)$

45) $\int \frac{e^x}{e^x+a}\,dx = \lg(e^x+a)$

46) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \lg \sin x$

47) $\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx = -\frac{1}{b}\lg(a+b\cos x).$

§ 2. Integration rationaler algebraischer Brüche.

$$\int \frac{\varphi(x)}{ax+b}\,dx.$$

Nachdem durch Division mit dem Nenner in den Zähler der Bruch in einen ganzen Quotienten und einen Restbruch, dessen Zähler die Variabele nicht mehr enthält, zerlegt ist, werden die einzelnen Theile integrirt.

Aufgaben.

48) $\int \frac{10x^4-17x^3-24x^2+16x-14}{2x-5}\,dx = \int\left(5x^3+4x^2-2x+3+\frac{1}{2x-5}\right)dx$

$$= \frac{5x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{1}{2}\lg(2x-5)$$

49) $\int \frac{x^4-6x^3+13x^2-10x+3}{x-2}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 3\lg(x-2)$

50) $\int \frac{2x^3+7x^2+4x+2}{2x+3}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{5}{2}\lg(2x+3)$

51) $\int \frac{x+a}{x+b}\,dx = x + (a-b)\lg(x+b).$

52) $\int \frac{12-28x+17x^2-10x^3}{1-5x}\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x - \frac{7}{5}\lg(1-5x).$

Steht die Variabele unter einem Wurzelzeichen, so ist der Ausdruck zuerst durch Substitution rational zu machen.

53) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{z^2}{z+1}\,dz$, wenn $z = \sqrt{x}$;

$$= 2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \lg(1+\sqrt{x})\right)$$

54) $\int \frac{5}{2+\sqrt{x}}\,dx = 10\sqrt{x} - 20\lg(2+\sqrt{x})$

55) $\int \frac{x^2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} +$

$$+ x - 2\sqrt{x} + 2\lg(1+\sqrt{x}).$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^2+2ax+b}\,dx.$$

Wenn der Zähler von höherem Grade ist als der Nenner, so scheiden wir durch Division einen Quotienten ab und integriren denselben Glied für Glied. Das Integral des noch übrigen Restbruches hat im Allgemeinen folgende Form:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}\,dx.$$

Zunächst lösen wir die Gleichung: $x^2+2ax+b=0$, nennen die Wurzeln α und β, setzen $x^2+2ax+b = (x-\alpha)(x-\beta)$ und unterscheiden 3 Fälle.

1) Die Wurzeln α und β sind reell und verschieden. Der Bruch wird dann in Partialbrüche zerlegt wie folgt:

$$\frac{mx+n}{x^2+2ax+b} = \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Die Zähler A und B sind nun so zu bestimmen, dass die Gleichung identisch richtig ist, d. h., dass die beiden Seiten für jeden beliebigen Werth von x gleich sind. Wir setzen:

$$\frac{mx+n}{x-\beta} = A + \frac{B(x-\alpha)}{x-\beta}$$

wählen $x=\alpha$ und finden $\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta} = A$. Auf die nämliche

Weise findet man auch B; doch kann B auch aus A dadurch abgeleitet werden, dass man α mit β vertauscht. $B = -\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}$.

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}}{x-\alpha} - \frac{\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}}{x-\beta};$$

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}\,dx = \frac{(m\alpha+n)\lg(x-\alpha)-(m\beta+n)\lg(x-\beta)}{\alpha-\beta}. \quad (4)$$

Aufgaben.

56) $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx = 3\lg(x-5) - 2\lg(x+1)$

57) $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1}\,dx = 5\lg(x+\frac{1}{2}) - 4\lg(x+1)$

58) $\int \frac{6x-13}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}\,dx = 2\lg(x-3) + 4\lg(x-\frac{1}{2})$

59) $\int \frac{\frac{5}{6}x-16}{x^2+3x-18}\,dx = \frac{7}{6}\lg(x+6) - \frac{2}{3}\lg(x-3)$

60) $\int \frac{3x^3+5x^2-29x-25}{x^2+x-12}\,dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + 2\lg(x-3) + 3\lg(x+4)$

61) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + x - \frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5} + 3x^{\frac{2}{3}} -$
$- 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 3\lg(x^{\frac{1}{3}}-1) + 9\lg(x^{\frac{1}{6}}+1).$

Man setze $x^{\frac{1}{6}} = z$.

62) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\lg\frac{x-a}{x+a}$

63) $\int \frac{1}{x^2+2x-1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2-2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\lg\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}$

64) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2-(ai)^2}\,dx = \frac{1}{2ai}\lg\frac{x-ai}{x+ai}$.

Es ist aber auch bereits gefunden:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a},$$

und da wir wissen, dass zwei Integralwerthe der nämlichen Funktion nur um eine Constante differiren können, so ist es

gestattet zu setzen: $\frac{1}{2i}\lg\frac{x-ai}{x+ai} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$. Wird diese Formel zur Verwandlung von Integralwerthen benutzt, so kann die Constante C in die willkürliche Constante des Integrals aufgenommen werden. Setzen wir nun noch $x-p$ für x und q für a, so entsteht die Formel:

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{x-p-qi}{x-p+qi} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q} + C, \qquad (5)$$

die bald Verwendung finden wird.

2) Die beiden Wurzeln α und β sind reell und gleich. Dann nimmt die Formel (4) die Form $\frac{0}{0}$ an und erhält ihren wahren Werth, wenn man Zähler und Nenner nach β differentiirt und dann $\beta = \alpha$ setzt. So wird gefunden:

$$\int\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2}dx = -\left[\frac{m\lg(x-\beta) - \frac{m\beta+n}{x-\beta}}{-1}\right]_{\beta=\alpha}$$

$$= m\lg(x-\alpha) - \frac{m\alpha+n}{x-\alpha}. \qquad (6)$$

Will man diese Formel direkt ableiten, so setzt man:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)},$$

oder $mx+n = A + B(x-\alpha)$ und findet $B = m$ und $A = m\alpha + n$. Die beiden Theile sind dann leicht zu integriren. Man könnte auch so verfahren:

$$\int\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2}dx = \frac{m}{2}\int\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}dx + \int\frac{m\alpha+n}{(x-\alpha)^2}dx =$$

$$= m\lg(x-\alpha) - \frac{m\alpha+n}{(x-\alpha)}.$$

65) $\int\frac{2x-13}{(x-5)^2}dx = 2\lg(x-5) + \frac{3}{x-5}$

66) $\int\frac{3x+1}{(x+2)^2}dx = 3\lg(x+2) + \frac{5}{x+2}$.

3) Die beiden Wurzeln α und β der Gleichung $x^2 + 2ax + b = 0$ sind complex und von der Form:

$$\alpha = p + qi, \quad \beta = p - qi.$$

Es ist dann $p = -a$, $q = \sqrt{b - a^2}$, und Formel (4) gestaltet sich, wie folgt:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}\,dx = \int \frac{mx+n}{(x-p-qi)(x-p+qi)}\,dx$$

$$= \frac{\{m(p+qi)+n\}\lg(x-p-qi) - \{m(p-qi)+n\}\lg(x-p+qi)}{2qi}$$

$$= \frac{mp+n}{q}\cdot\frac{1}{2i}\lg\frac{x-p-qi}{x-p+qi} + \frac{m}{2}\lg[(x-p-qi)(x-p+qi)]$$

$$= \frac{m}{2}\lg(x^2+2ax+b) + \frac{mp+n}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q} + C. \qquad (7)$$

Uebrigens kann diese Formel auch direkt entwickelt werden.

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}\,dx = \frac{m}{2}\int \frac{2x+2a}{x^2+2ax+b}\,dx + \int \frac{n-am}{x^2+2ax+b}\,dx$$

$$= \frac{m}{2}\lg(x^2+2ax+b) + \int \frac{n-am}{(x+a)^2+(b-a^2)}\,dx.$$

Da nach der Voraussetzung $\sqrt{b-a^2}$ reell ist, so ist die Substitution $(a+x) = z\sqrt{b-a^2}$ möglich und wir erhalten:

$$\int \frac{n-am}{(x+a)^2+(b-a^2)}\,dx = \frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg} z.$$

So findet man schliesslich:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}\,dx = \frac{m}{2}\lg(x^2+2ax+b) + \frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}.$$

Diese Formel stimmt bis auf die Integrations-Constante mit (7) überein, weil dort $p = -a$, $q = \sqrt{b-a^2}$ gesetzt ist.

Aufgaben.

67) $\int \frac{2u-10}{u^2+2u+10}\,du = \lg(u^2+2u+10) - 4\operatorname{arc\,tg}\frac{u+1}{3}$

68) $\int \frac{2u-20}{u^2-8u+25}\,du = \lg(u^2-8u+25) - 4\operatorname{arc\,tg}\frac{u-4}{3}$

69) $\int \frac{3u+4}{u^2+4u+8}\,du = \frac{3}{2}\lg(u^2+4u+8) - \operatorname{arc\,tg}\frac{u+2}{2}$

70) $\int \frac{u+6}{u^2-3}\,du = \frac{1}{2}\lg(u^2-3) + \sqrt{3}\lg\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}$

71) $\int \frac{u+6}{u^2+3}\,du = \frac{1}{2}\lg(u^2+3) + 2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{3}}$

72) $\int \frac{6u}{u^2+4u+13}\,du = 3\lg(u^2+4u+13) - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{u+2}{3}$

73) $\int \frac{10u-44}{u^2-4u+20}\,du = 5\lg(u^2-4u+20) - 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{u-2}{4}$

74) $\int \frac{u^2}{5u^2+12}\,du = \frac{1}{5}u - \frac{1}{5}\sqrt{60} \operatorname{arc\,tg} u\sqrt{\frac{5}{12}}$

75) $\int \frac{4u-5}{u^2-6u+10}\,du = 2\lg(u^2-6u+10) + 7 \operatorname{arc\,tg}(u-3)$

76) $\int \frac{27u^6}{3u^2+2}\,du = \frac{9u^5}{5} - 2u^3 + 4u - \frac{8}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg} u\sqrt{\frac{3}{2}}$

77) $\int \frac{1}{a+bu^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} u\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Integration eines Bruches von der Form:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n}$$

Es wird vorausgesetzt, dass $m < n$ ist. Sollte diese Bedingung bei einem gegebenen Bruche noch nicht erfüllt sein, so kann man die Division, so lange es geht, ausführen. Der gegebene Bruch ist dann gleich einer ganzen Funktion nebst einem angehängten Bruch von der Form $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, in welchem $m < n$ ist. Vor allem Anderen muss nun der Nenner in Binomialfactoren zerlegt und darum die Gleichung:

$$f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0$$

aufgelöst werden. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden.

1) Die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind verschieden. Es ist dann:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

Soll nun einer dieser unbestimmten Zähler A, z. B. A_1, ermittelt werden, so multiplicirt man die Gleichung mit $(x-\alpha_1)$ und erhält:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)} = A_1 + \left[\frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right](x-\alpha_1).$$

Da die Zähler A so bestimmt werden müssen, dass die Gleichung für jeden beliebigen Werth von x richtig ist, so darf auch $x = \alpha_1$ gewählt werden. So findet man:

$$A_1 = \frac{\varphi(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}.$$

Dass auch alle übrigen Zähler A auf die nämliche Weise bestimmt werden können, bedarf einer besonderen Erläuterung nicht. Sie gehen auch aus A_1 hervor, wenn man nach der Reihe die einzelnen Indices mit 1 vertauscht. So ist allgemein:

$$A_p = \frac{\varphi(\alpha_p)}{(\alpha_p-\alpha_1)(\alpha_p-\alpha_2)\ldots(\alpha_p-\alpha_n)}. \quad (8)$$

Dieser Formel kann eine etwas andere Gestalt gegeben werden. Es ist nämlich der Nenner von A_p:

$$\left[(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{p-1})(x-\alpha_{p+1})\ldots(x-\alpha_n)\right]_{x=\alpha_p} = \left[\frac{f(x)}{x-\alpha_p}\right]_{x=\alpha_p}.$$

Da aber $(x-\alpha_p)$ auch Factor von $f(x)$ ist, so nimmt die rechte Seite für $x = \alpha_p$ die Form $\frac{0}{0}$ an und muss der eigentliche Werth nach § 9 ermittelt werden. Wir finden:

$$\left[\frac{f(x)}{x-\alpha_p}\right]_{x=\alpha_p} = \left[\frac{f'(x)}{1}\right]_{x=\alpha_p} = f'(\alpha_p); \text{ und } A_p = \frac{\varphi(\alpha_p)}{f'(\alpha_p)}. \quad (9)$$

Beispiel: $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \dfrac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}$

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 7; \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 6$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-4} + \frac{A_3}{x-7}$$

$$A_1 = \frac{\varphi(-2)}{f'(-2)} = -3, \quad A_2 = \frac{\varphi(4)}{f'(4)} = 2, \quad A_3 = \frac{\varphi(7)}{f'(7)} = 8$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = -\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-4} + \frac{8}{x-7}.$$

78) $$\int \frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}\,dx = -3\lg(x+2) + 2\lg(x-4) + 8\lg(x-7).$$

Aufgaben.

79) $$\int \frac{5u^2-7u+13}{u^3-6u^2+11u-6}\,du = \frac{11}{2}\lg(u-1) - 19\lg(u-2) + \frac{37}{2}\lg(u-3)$$

80) $\int \frac{u^2+5u+41}{(u+3)(u-1)(u-\frac{1}{2})}du = \frac{5}{2}\lg(u+3)+\frac{47}{2}\lg(u-1)-25\lg\left(u-\frac{1}{2}\right)$

81) $\int \frac{1}{u^3-a^2u}du = \frac{1}{2a^2}\lg(u^2-a^2) - \frac{1}{a^2}\lg u$

82) $\int \frac{10u^3+40u^2+40u+6}{u^4+6u^3+11u^2+6u}du = \lg u + 2\lg(u+1) + 3\lg(u+2) + 4\lg(u+3)$

83) $\int \frac{17u^2-u-26}{(u^2-1)(u^2-4)}du = \frac{5}{3}\lg(u-1) - \frac{4}{3}\lg(u+1) + \frac{10}{3}\lg(u-2) - \frac{11}{3}\lg(u+2)$

84) $\int \frac{4u^3+9u^2-270u+653}{(u-3)(u-4)(u-7)(u+5)}du = \lg(u^2-7u+12) + 4\lg(u-7) - 2\lg(u+5)$

85) $\int \frac{u^2-3u+3}{u^3-4u^2-7u+10}du = \frac{13}{21}\lg(u+2)+\frac{13}{28}\lg(u-5)-\frac{1}{12}\lg(u-1)$

86) $\int \frac{5u^2-7au+11a^2}{u^3-6au^2+11a^2u-6a^3}du = \frac{9}{2}\lg(u-a) - 17\lg(u-2a) + \frac{35}{2}\lg(u-3a)$

87) $\int \frac{2u^3+12au^2-8a^2u-12a^3}{(u^2-a^2)(u^2-4a^2)}du = \lg(u^2-a^2) + 3\lg\frac{u-2a}{u+2a}$

88) $\int \frac{2u^4-10u^3+21u^2-20u+5}{u^2-3u+2}du = \frac{2u^3}{3} - 2u^2 + 5u + \lg(u-2) + 2\lg(u-1).$

Wenn die Coefficienten in $f(x)$ reell sind, aber unter den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sich auch complexe Werthe befinden, so müssen diese paarweise conjugirt vorkommen und die Form haben: $\alpha = p + qi$, $\beta = p - qi$. Die Zerlegung in Partialbrüche lässt sich dann immer noch auf die nämliche Weise ausführen, wie an Beispielen gezeigt werden soll.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{2x}{(x-i)(x+i)(x-ri)(x+ri)}, \quad r = \sqrt{3}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-i} + \frac{A_2}{x+i} + \frac{A_3}{x-ri} + \frac{A_4}{x+ri}$$

$$A_1 = \frac{\varphi(i)}{f'(i)} = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{\varphi(-i)}{f'(-i)} = \frac{1}{2}, \quad A_3 = \frac{\varphi(ri)}{f'(ri)} = -\frac{1}{2},$$

$$A_4 = \frac{\varphi(-ri)}{f'(-ri)} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-i} + \frac{\frac{1}{2}}{x+i} - \frac{\frac{1}{2}}{x-ri} - \frac{\frac{1}{2}}{x+ri}$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2}[\lg(x-i)+\lg(x+i)] - \frac{1}{2}[\lg(x-ri)+\lg(x+ri)] =$$

$$= \frac{1}{2}\lg(x^2+1) - \frac{1}{2}\lg(x^2 - r^2 i^2)$$

89) $$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \frac{1}{2}\lg\frac{x^2+1}{x^2+3}.$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-2-5i} + \frac{A_2}{x-2+5i} + \frac{A_3}{x-1-2i} + \frac{A_4}{x-1+2i}$$

$$A_1 = \frac{\varphi(2+5i)}{f'(2+5i)} = 2-3i, \quad A_2 = \frac{\varphi(2-5i)}{f'(2-5i)} = 2+3i,$$

$$A_3 = \frac{\varphi(1+2i)}{f'(1+2i)} = 3-4i, \quad A_4 = \frac{\varphi(1-2i)}{f'(1-2i)} = 3+4i;$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2-3i}{x-2-5i} + \frac{2+3i}{x-2+5i} + \frac{3-4i}{x-1-2i} + \frac{3+4i}{x-1+2i}$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = (2-3i)\lg(x-2-5i) + (2+3i)\lg(x-2+5i)$$
$$+ (3-4i)\lg(x-1-2i) + (3+4i)\lg(x-1+2i)$$
$$= 2\lg[(x-2-5i)(x-2+5i)] + 3\lg[(x-1-2i)(x-1+2i)]$$
$$- 3i\lg\frac{x-2-5i}{x-2+5i} - 4i\lg\frac{x-1-2i}{x-1+2i}.$$

Multiplicirt man die Factoren aus und wendet auf die beiden letzten Theile Formel (5) an, so gibt es:

90) $$\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}\,dx = 2\lg(x^2-4x+29)$$
$$+ 3\lg(x^2-2x+5) + 6\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{5} + 8\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}.$$

Wie die complexen Wurzeln nur paarweise conjugirt in der Form $\alpha = p+qi$ und $\beta = p-qi$ vorkommen, so sind, falls auch in $\varphi(x)$ nur reelle Coefficienten auftreten, die entsprechenden Zähler ebenfalls von der conjugirten Form $A+Bi$ und $A-Bi$. Dies erklärt sich leicht so: Wird $x^n = (p+qi)^n$

entwickelt, so hat das Resultat die Form $P+Qi$, indem in P die Glieder der geraden, in Qi die Glieder der ungeraden Potenzen von i zusammen gefasst sind. Es können sich aber die Glieder der Entwickelung von $x^n=(p-qi)^n$ nur durch das Vorzeichen der ungeraden Potenzen von qi, resp. von i, von den Gliedern der vorhergehenden Entwickelung unterscheiden, und wir dürfen kurzweg $(p-qi)^n=P-Qi$ setzen, wenn wir wissen, dass $(p+qi)^n=P+Qi$ ist. Das Gesagte lässt sich leicht auf eine Summe solcher Potenzen von x mit reellen Coefficienten übertragen. Bezeichnen wir zwei conjugirte Zähler durch A_1 und A_2, so ist:

$$A_1=\frac{\varphi(p+qi)}{f'(p+qi)}=\frac{u+vi}{r+ti}=\frac{(u+vi)(r-ti)}{(r+ti)(r-ti)}=\frac{ru+tv}{r^2+t^2}+\frac{rv-tu}{r^2+t^2}i$$

$$A_2=\frac{\varphi(p-qi)}{f'(p-qi)}=\frac{u-vi}{r-ti}=\frac{(u-vi)(r+ti)}{(r-ti)(r+ti)}=\frac{ru+tv}{r^2+t^2}-\frac{rv-tu}{r^2+t^2}i.$$

Obgleich sich auf diese Weise die eine Hälfte der complexen Partialbruchzähler aus der anderen von selbst ergibt, so bleiben doch die auszuführenden Rechnungen immer noch so umständlich, dass in den meisten Fällen eine andere Art der Zerlegung den Vorzug verdient. Werden nämlich zwei solche Partialbrüche addirt, so verschwinden die imaginären Theile und die Summe ist ein Bruch von der Form $\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}$ und nach (7) leicht zu integriren. Wie man die Zähler findet, soll an Beispielen gezeigt werden.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)}=\frac{A}{x-1}+\frac{mx+n}{x^2-6x+13}$$

$A=\frac{\varphi(1)}{f'(1)}=5$. Dieser Werth wird sofort benutzt.

$$\frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)}=\frac{5(x^2-6x+13)+(mx+n)(x-1)}{(x-1)(x^2-6x+13)}.$$

Nach dem Satze von den unbestimmten Coefficienten ergeben sich aus den Zählern die Relationen: $8=5+m$, $61=65-n$, oder $m=3$, $n=4$.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{5}{x-1}+\frac{3x+4}{x^2-6x+13}.$$

91) $$\int \frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)}\,dx = 5\lg(x-1)+\frac{3}{2}\lg(x^2-6x+13) + \frac{13}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}.$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{mx+n}{x^2+x+1} + \frac{rx+t}{x^2-x+1}.$$

Nachdem die rechte Seite gleichnamig gemacht ist, werden die Zähler gleichgesetzt.

$$1 = (mx+n)(x^2-x+1)+(rx+t)(x^2+x+1);$$

$$m+r=0,\ n-m+r+t=0,\ m-n+r+t=0,\ n+t=1:$$

$$m=\tfrac{1}{2},\ n=\tfrac{1}{2},\ t=\tfrac{1}{2},\ r=-\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} - \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}$$

92) $$\int \frac{1}{x^4+x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{4}\lg\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

93) $$\int \frac{15x^2+66x+21}{(x-1)(x^2+4x+29)}\,dx = 3\lg(x-1)+6\lg(x^2+4x+29) + \frac{42}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{5}$$

94) $$\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2-3x-6}\,dx = \frac{4}{7}\lg(x-2)+\frac{17}{14}\lg(x^2+3) - \frac{1}{7\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}$$

95) $$\int \frac{7x^2+6x-16}{(x-3)(x^2+4)}\,dx = 5\lg(x-3)+\lg(x^2+4)+6\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$$

96) $$\int \frac{2x^3+28x^2-257x+531}{x^2-16x+69)(x^2-6x+16)}\,dx = \frac{5}{2}\lg(x^2-16x+69)+ + \frac{43}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-8}{\sqrt{5}} - \frac{3}{2}\lg(x^2-6x+16) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{\sqrt{7}}.$$

2. Die Wurzeln $a_1, a_2 \ldots a_n$ sind alle gleich. Dann heisst das Integral:

$$\int \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}\,dx.$$

Die Zerlegung in Partialbrüche ist in diesem Falle nach dem folgenden Schema auszuführen.

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n} = \frac{A_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-\alpha)}.$$

Durch die Substitution $x - \alpha = \frac{1}{z}$, oder $x = \frac{1+\alpha z}{z}$, geht diese Identität in die folgende über:

$$z^n . \varphi\left(\frac{(1+\alpha z)}{z}\right) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_1 z.$$

Wird die linke Seite ausgeführt, so entsteht ein Ausdruck, welcher der rechten identisch gleich ist, und wir lernen so die Werthe der A kennen.

$$\frac{5u^3 - 11u^2 + 5u + 4}{(u-1)^4} = \frac{A_4}{(u-1)^4} + \frac{A_3}{(u-1)^3} + \frac{A_2}{(u-1)^2} + \frac{A_1}{u-1}$$

$$u - 1 = \frac{1}{z}, \quad u = \frac{1+z}{z};$$

$$3z^4 - 2z^3 + 4z^2 + 5z = A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z.$$

Daraus entnehmen wir: $A_4 = 3$, $A_3 = -2$, $A_2 = 4$, $A_1 = 5$;

$$\frac{5u^3 - 11u^2 + 5u + 4}{(u-1)^4} = \frac{3}{(u-1)^4} - \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{4}{(u-1)^2} + \frac{5}{u-1}$$

97) $$\int \frac{5u^3 - 11u^2 + 5u + 4}{(u-1)^4} du = -\frac{1}{(u-1)^3} + \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{4}{u-1} + 5 \lg (u-1)$$

98) $$\int \frac{u^3 - 4u^2 + 1}{(u-2)^2} du = \frac{u^2}{2} - 4 \lg (u-2) + \frac{7}{u-2}$$

99) $$\int \frac{2u^5 - u^4 + 4u^2 - 5u + 1}{(u-3)^6} du = 2 \lg (u-3) - \frac{29}{u-3} - \frac{84}{(u-3)^2} - \frac{490}{3(u-3)^3} - \frac{721}{4(u-3)^4} - \frac{427}{5(u-3)^5}$$

100) $$\int \frac{3u^2 - 17u + 21}{(u-2)^3} du = \frac{1}{2(u-2)^2} + \frac{5}{u-2} + 3 \lg (u-2)$$

101) $$\int \frac{6u^3 + 89u^2 + 438u + 719}{(u+5)^4} du = -\frac{4}{3(u+5)^3} + \frac{1}{(u+5)^2} + \frac{1}{u+5} + 6 \lg (u+5).$$

Wenn der Zähler ein einfacher Werth ist, kann auch die Integration nach Theilen Anwendung finden.

102) $$\int u^n (u-\alpha)^{-p}\,du = -\frac{u^n(u-\alpha)^{-p+1}}{p-1} + \frac{n}{p-1}\int u^{n-1}(u-\alpha)^{-p+1}\,du$$

$$\int u^2 (u-\alpha)^{-4}\,du = -\frac{u^2(u-\alpha)^{-3}}{3} + \frac{2}{3}\int u\,(u-\alpha)^{-3}\,du$$

$$\int u\,(u-\alpha)^{-3}\,du = -\frac{u\,(u-\alpha)^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\int (u-\alpha)^{-2}\,du$$

$$\int (u-\alpha)^{-2}\,du = -\,(u-\alpha)^{-1}$$

103) $$\int \frac{u^2}{(u-\alpha)^4}\,du = -\frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{(u-\alpha)^3} + \frac{u}{(u-\alpha)^2} + \frac{1}{u-\alpha}\right]$$

104) $$\int \frac{u^3+a^2u-a^3}{(u-a)^3}\,du = (u-a) - \frac{a^3}{2(u-a)^2} - \frac{4a^2}{u-a} + 3a\lg(u-a)$$

105) $$\int \frac{u^2}{(a+bu)^3}\,du = -\frac{u^2}{2b\,(a+bu)^2} - \frac{u}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^3}\lg(a+bu)$$

106) $$\int \frac{u^2}{(u^2+1)\,(u^2+4)}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{3u^2}{(u^2+1)\,(u^2+4)}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{4\,(u^2+1) - (u^2+4)}{(u^2+1)\,(u^2+4)}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{4}{u^2+4}\,du -$$

$$- \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} u.$$

3. Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt die gleiche Wurzel α $p$mal, die andere gleiche Wurzel β $r$mal u. s. w. und ausserdem noch die einfachen Wurzeln $\lambda, \mu, \ldots . \sigma$. Es ist dann:

$$f(x) = (x-\alpha)^p\,(x-\beta)^r \ldots . (x-\lambda)\,(x-\mu) \ldots . (x-\sigma).$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_p}{(x-\alpha)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x-\alpha)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha}$$

$$+ \frac{B_r}{(x-\beta)^r} + \frac{B_{r-1}}{(x-\beta)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-\beta}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M}{x-\mu} + \cdots + \frac{S}{x-\sigma}.$$

Die Zähler $L, M \ldots . S$ können nach Formel (9) in bekannter Weise ermittelt werden. In entsprechender Weise findet sich:

$$A_p = \frac{1.2.3 \ldots . p\,.\,\varphi(\alpha)}{f^{(p)}(\alpha)}, \qquad B_r = \frac{1.2.3 \ldots . r\,.\,\varphi(\beta)}{f^{(r)}(\beta)}, \text{ u. s. w.}$$

Dagegen ergeben sich für die übrigen $A_{p-1} \ldots A_1$, $B_{r-1} \ldots B_1$, u. s. w. nach dieser Methode unbestimmte Formen. Wie sie gefunden werden können, soll an einem Beispiele gezeigt werden.

$$\frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)} = \frac{A_4}{(x-1)^4}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{\varrho(x)}{\psi(x)},$$

wobei der grösseren Allgemeinheit wegen unter $\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$ die Summe aller Brüche verstanden werden soll, welche $(x-1)$ nicht als Nenner besitzen, in unserem Beispiele nur noch ein einziger Bruch mit dem Nenner $x+3$. Die Substitution $x-1=\frac{1}{z}$, oder $x=\frac{1+z}{z}$, führt zu der anderen Form:

$$\frac{12z^5+11z^4+22z^3+33z^2+9z}{4z+1} = A_4z^4+A_3z^3+A_2z^2+A_1z+\frac{\varrho\left(\frac{1+z}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1+z}{z}\right)}.$$

Die Funktionen ϱ und ψ sind in z von der 0ten Dimension. Nachdem durch Multiplication mit der geeigneten Potenz von z in ϱ und ψ die Nenner beseitigt sind, ist ihr Grad gleich hoch und ihr Quotient von der 0ten Dimension, so dass keines seiner Glieder mit einem der vorhergehenden Werthe vereinigt werden könnte, wenn man die Division auch noch ausführen wollte. Wird die Division auf der linken Seite ausgeführt, so gelangt man zu der identischen Gleichung:

$$3z^4+2z^3+5z^2+7z+\frac{2z}{4z+1} = A_4z^4+A_3z^3+A_2z^2+A_1z+\frac{\varrho\left(\frac{1+z}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1+z}{z}\right)}$$

und kann daraus sofort die Werthe $A_4=3$, $A_3=2$, $A_2=5$, $A_1=7$ entnehmen. Wird in den übrig gebliebenen Bruch, hier $\frac{2z}{4z+1}$, wieder $z=\frac{1}{x-1}$ substituirt, so wird auch die bisher noch unbekannt gewesene Funktion $\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$ gefunden. Enthält der Nenner $\psi(x)$ noch weitere gleiche Factoren, so ist das angezeigte Verfahren zu wiederholen, im anderen Falle wird $\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$ auf gewöhnliche Weise zerlegt.

$$\frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)} = \frac{3}{(x-1)^4}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{7}{x-1}+\frac{2}{x+3}.$$

107) $$\int\frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)}\,dx = -\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{5}{x-1}+7\lg(x-1)+2\lg(x+3).$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x^4-7x^3+3x^2-11x+13}{x^3(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A_3}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_1}{x}+\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{13z^6-11z^5+3z^4-7z^3+z^2}{z^3+2z^2+2z+1} = 13z^3-37z^2+51z - \frac{48z^3+64z^2+51z}{z^3+2z^2+2z+1}.$$

Es ist $A_3 = 13$, $A_2 = -37$, $A_1 = 51$. Wird nun im letzten Theile wieder $z = \frac{1}{x}$ gesetzt, so findet man:

$$\frac{\varrho(x)}{\varphi(x)} = -\frac{51x^2+64x+48}{(x+1)(x^2+x+1)} = -\left[\frac{B}{x+1}+\frac{mx+n}{x^2+x+1}\right].$$

Dieser Gleichung entsprechen $B = 35$, $m = 16$, $n = 13$.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{13}{x^3}-\frac{37}{x^2}+\frac{51}{x}-\frac{35}{x+1}-\frac{16x+13}{x^2+x+1}.$$

108) $$\int\frac{x^4-7x^3+3x^2-11x+13}{x^3(x+1)(x^2+x+1)}\,dx = -\frac{13}{2x^2}+\frac{37}{x}+51\lg x - 35\lg(x+1)-8\lg(x^2+x+1)-\frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Das eben erläuterte Verfahren der Zählerbestimmung erfordert umständliche Rechnungen und empfiehlt sich nur dann, wenn eine grössere Anzahl von Zählern durch die nämliche Substitution ermittelt werden kann. Sind dagegen die Exponenten der Nennerbinome nicht hoch, so ist die folgende Methode einfacher in der Ausführung:

$$\frac{x^3-2x^2+7x+4}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1}{x+1}.$$

Man findet auf gewöhnliche Weise $A_2 = \frac{1}{2}$, $B_2 = -\frac{1}{2}$, setzt diese Werthe ein und findet nach dem Satz der unbestimmten Coefficienten $A_1 = -1$, $B_1 = 2$.

109) $$\int \frac{x^3-2x^2+7x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx = -\frac{5}{2(x-1)} - \lg(x-1) + \frac{3}{2(x+1)} + 2\lg(x+1)$$

110) $$\int \frac{x^3-22x^2+57x+32}{(x+1)^2(x-3)^2}\,dx = \frac{3}{x+1} + 5\lg(x+1) - \frac{2}{x-3} - 4\lg(x-3)$$

111) $$\int \frac{7x^3-32x^2+50x-28}{(x-1)^3(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\lg(x-1) + 4\lg(x-4)$$

112) $$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} + 2\lg(x-1) - \lg x$$

113) $$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{5}{2(x-1)} - \tfrac{3}{4}\lg(x-1) + \tfrac{3}{4}\lg(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg} x$$

114) $$\int \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2\lg x - \frac{1}{4}\lg(x+1) - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\lg(x-1).$$

Die bisher entwickelte Zerlegung in Partialbrüche ist auch noch ausführbar, wenn die gleichen Wurzeln complex sind.

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2x+1}{(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_2}{(x-i)^2} + \frac{A_1}{x-i} + \frac{B_2}{(x+i)^2} + \frac{B_1}{x+i}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}i}{x-i} + \frac{\frac{1}{4}i}{x+i} - \frac{\frac{2i+1}{4}}{(x-i)^2} + \frac{\frac{2i-1}{4}}{(x+i)^2}.$$

115) $$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{4}i\lg\frac{x-i}{x+i} - \frac{\frac{2i-1}{4}}{x+i} + \frac{\frac{2i+1}{4}}{x-i}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x-2}{2(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{\frac{i}{8}}{(x+i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x+i)^2} + \frac{\frac{i}{16}}{x+i} - \frac{\frac{i}{8}}{(x-i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x-i)^2} - \frac{\frac{i}{16}}{x+i}$$

116) $$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{8}\,\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$$

Reductionsformeln können nicht selten dazu dienen, durch wiederholte Anwendung derartige Integrale entweder ganz auszuführen, oder doch so weit zu vereinfachen, dass ihre weitere Ausführung nach den bisherigen Methoden sehr erleichtert ist.

117) $$\int x^n (a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(a+bx^m)^p - \frac{mbp}{n+1}\int x^{m+n}(a+bx^m)^{p-1}\,dx$$

118) $$\int x^4 (a+bx^2)^3\,dx = \frac{x^5}{5}(a+bx^2)^3 - \frac{6b}{5}\int x^6 (a+bx^2)^2\,dx.$$

In dieser Gestalt kann die Formel dazu dienen, ein positives p nach und nach so weit zu reduciren, dass die weitere Ausführung leicht ist. Soll dagegen ein negatives p dem absoluten Werthe nach verkleinert werden, so muss man die Formel zuerst umkehren. Wird dann noch p statt $p-1$ und n statt $n+m$ gesetzt, so heisst sie:

119) $$\int x^n (a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^{n-m+1}}{mb(p+1)}(a+bx^m)^{p+1} - \frac{n-m+1}{mb(p+1)}\int x^{n-m}(a+bx^m)^{p+1}\,dx.$$

Die Formel wird unbrauchbar für $p=-1$.

120) $$\int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{x^4}{4(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\lg(1+x^2).$$

Die nämliche Aufgabe kann auch so behandelt werden:

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3} = \frac{x^3(1+x^2)-x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2} - \frac{x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^3} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

121) $$\int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\lg(x^2+1).$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^n - 1}\, dx.$$

Nach der Formel von Moivre (Diff. R. Aufgabe 430) ist

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Soll die Gleichung $x^n - 1 = 0$ gelöst, oder $x = \sqrt[n]{1}$ nach dieser Formel gefunden werden, so setzt man $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$, indem man k eine beliebige ganze Zahl bedeuten lässt. Es ist dann:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und für jeden beliebigen Werth von k geht aus der Formel einer der verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ hervor:

$k = 0;$ $\quad w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1;$ $\quad w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$k = 2;$ $\quad w_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$

. . . . . .

$k = n - 1;$ $\quad w_{n-1} = \cos\frac{n-1}{n}2\pi + i\sin\frac{n-1}{n}2\pi.$

Wird mit der Wahl der ganzen Zahl k in dieser Weise fortgefahren, so wiederholen sich nur die bereits gefundenen Wurzelwerthe. So findet man z. B. für $k = n$:

$$w_n = \cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$
$$= \cos 0 + i\sin 0 = w_0.$$

Weiter ist nach dem Satze von Moivre:

$$w_1^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = w_2$$

$$w_1^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} = w_3$$

u. s. w.

Hiernach ist: $w_0 = 1;\ w_2 = w_1^2;\ w_3 = w_1^3, \ldots w_{n-1} = w_1^{n-1}.$

Es ist auch $\cos\frac{n-k}{n}2\pi + i\sin\frac{n-k}{n}2\pi = \cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) +$

$+ i \sin\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$, oder es sind die beiden Wurzeln w_k und w_{n-k} conjugirt complex. Ist n gerade, so ist $w_{\frac{n}{2}}$ sich selbst conjugirt und reell, so dass in diesem Falle 2 reelle Wurzeln existiren. So finden wir z. B. für $w = \sqrt[6]{1}$, dass $w_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ und $w_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} =$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ und w_5 conjugirt zu w_1 ist.

1. Beispiel: $x = \sqrt[3]{1}$; $w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = w_1^2$;

$w_3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \cos 0 + i\sin 0 = w_0 = 1$.

2. Beispiel: $x = \sqrt[4]{1}$; $w_0 = 1$; $w_1 = i$;

$w_2 = w_1^2 = -1$; $w_3 = w_1^3 = -i$.

3. Beispiel: $x = \sqrt[6]{1}$; $w_0 = 1$; $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$;

$w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_3 = -1$; $w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$;

$w_5 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Conjugirt ist w_5 mit w_1, w_4 mit w_2 und w_3 mit sich selbst.

Der grösseren Einfachheit wegen wollen wir $w_1 = \varepsilon$ setzen und können dann die übrigen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ durch ε^2, ε^3, ε^4, ... ε^{n-1}, ε^n bezeichnen.

Es ist dann:

$$\frac{\varphi(x)}{x^n - 1} = \frac{A_0}{x-1} + \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^2} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-\varepsilon^{n-1}}$$

und nach Formel (9):

$$A_k = \left[\frac{\varphi(x)}{n x^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^k} = \left[\frac{x\varphi(x)}{n x^n}\right]_{x=\varepsilon^k} = \frac{\varepsilon^k \varphi(\varepsilon^k)}{n}.$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi(1)}{x-1} + \frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\varphi(\varepsilon^2)}{x-\varepsilon^2} + \cdots + \frac{\varepsilon^{n-1}\varphi(\varepsilon^{n-1})}{x-\varepsilon^{n-1}}\right].$$

122) $$\int \frac{\varphi(x)}{x^n-1}\,dx = \frac{1}{n}\Big[\varphi(1)\lg(x-1) + \varepsilon\varphi(\varepsilon)\lg(x-\varepsilon) + \\ + \cdots + \varepsilon^{n-1}\varphi(\varepsilon^{n-1})\lg(x-\varepsilon^{n-1})\Big].$$

Die Glieder dieser Formel können paarweise zu reellen Ausdrücken vereinigt werden. Da nämlich die Wurzelwerthe ε^k und ε^{n-k} conjugirt sind, so müssen es auch die Zähler $A_k = \varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k)$ und $A_{n-k} = \varepsilon^{n-k}\varphi(\varepsilon^{n-k})$ sein, oder es muss $A_{n-k} = A - Bi$ sein, wenn $A_k = A + Bi$ ist. Mithin dürfen wir setzen:

$$\varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k)\lg(x-\varepsilon^k) + \varepsilon^{n-k}\varphi(\varepsilon^{n-k})\lg(x-\varepsilon^{n-k}) =$$
$$(A+Bi)\lg(x-\varepsilon^k) + (A-Bi)\lg(x-\varepsilon^{n-k}) =$$
$$A\lg\left\{\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$
$$-2B\frac{1}{2i}\lg\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}}{x-\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}$$
$$= A\lg\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right) - 2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}}.$$

123) $$\int\frac{1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\Big[\lg(x-1) + \left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\lg\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right) + \\ + \left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\lg\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\Big]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\lg(x-1) - \frac{1}{2}\lg(x^2+x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right].$$

124) $$\int\frac{x^2-3x}{x^4-1}dx = \frac{3}{4}\lg\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4}\lg\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

Man setze in der folgenden Aufgabe $\sqrt{3} = r$.

125) $$\int\frac{x}{x^6-1}dx =$$
$$= \frac{1}{6}\left[\begin{array}{l}\lg(x-1) + \dfrac{-1+ri}{2}\lg\left(x-\dfrac{1+ri}{2}\right) - \dfrac{1+ri}{2}\lg\left(x+\dfrac{1-ri}{2}\right) \\ +\lg(x+1) + \dfrac{-1+ri}{2}\lg\left(x+\dfrac{1+ri}{2}\right) - \dfrac{1+ri}{2}\lg\left(x-\dfrac{1-ri}{2}\right)\end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[\lg(x^2-1) - \frac{1}{2}\lg(x^4+x^2+1) - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right].$$

Die Ausrechnung solcher Integrale ist oft leichter, wenn man die als conjugirt bezeichneten Glieder schon bei der Zerlegung paarweise zusammen fasst. So ist z. B.:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{mx+n}{x^2+x+1}.$$

$A = \frac{\varphi(1)}{f'(1)} = \frac{a+b+c}{3}$. Wird der Werth für A substituirt, die rechte Seite gleichnamig gemacht und dann die Zähler gleich gesetzt, so ergibt sich daraus nach dem Satze von den unbestimmten Coefficienten: $m = \frac{2a-b-c}{3}$, $n = \frac{a+b-2c}{3}$.

126) $$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\Big[(a+b+c)\lg(x-1) + \\ + \frac{1}{2}(2a-b-c)\lg(x^2+x+1) + (b-c)\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big]$$

127) $$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4-1}dx = \frac{a+c}{4}\lg(x^2-1) + \frac{a-c}{4}\lg(x^2+1) + \\ + \frac{b+d}{4}\lg\frac{x-1}{x+1} + \frac{b-d}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^n+1}\,dx.$$

Die Gleichung: $x^n+1=0$, oder $x = \sqrt[n]{-1}$ wird wieder mit Hülfe der Moivre'schen Formel gelöst, indem man setzt: $-1 = \cos(1+2k)\pi + i\sin(1+2k)\pi$, wenn k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Dann ist:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{1+2k}{n}\pi + i\sin\frac{1+2k}{n}\pi$$

$$k=0; \quad w_0 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$$

$$k=1; \quad w_1 = \cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}$$

$$k=2; \quad w_2 = \cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}$$

. . . . . .

$$k=n-1; \quad w_{n-1} = \cos\frac{2n-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-1}{n}\pi.$$

Es kann leicht nachgewiesen werden, dass jede andere ganze Zahl k einen Wurzelwerth w hervorbringt, welcher mit einem der vorhergehenden zusammen fällt, so dass im Ganzen nur n unter sich verschiedene Werthe möglich sind. Nach dem öfter angeführten Satze von Moivre ist

$$w_0^3 = \cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n} = w_1$$

$$w_0^5 = \cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n} = w_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_0^{2n-1} = \cos\frac{2n-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-1}{n}\pi = w_{n-1}.$$

Auch diese Wurzelwerthe sind paarweise conjugirt imaginär, denn es ist

$$w_{n-1-k} = \cos\frac{2n-2k-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-2k-1}{n}\pi$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{2k+1}{n}\pi\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$= \cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi$$

ein Werth, welcher zu w_k conjugirt ist.

1. Beispiel: $x = \sqrt[3]{-1}$; $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $w_1 = -1$, $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

2. Beispiel: $x = \sqrt[4]{-1}$; $w_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$, $w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$, $w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$, $w_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$. Es ist w_0 zu w_3 und w_1 zu w_2 conjugirt.

Um das vorgelegte Integral auszuführen, setzen wir $w_0 = \varepsilon$ und

$$\frac{\varphi(x)}{x^n+1} = \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^3} + \frac{A_3}{x-\varepsilon^5} + \cdots + \frac{A_n}{x-\varepsilon^{2n-1}}$$

$$A_k = \left[\frac{\varphi(x)}{nx^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = \left[\frac{x\varphi(x)}{nx^n}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = -\frac{1}{n}\varepsilon^{2k-1}\varphi(\varepsilon^{2k-1}).$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^n+1} = -\frac{1}{n}\left[\frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3\varphi(\varepsilon^3)}{x-\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^5\varphi(\varepsilon^5)}{x-\varepsilon^5} + \cdots \frac{\varepsilon^{2n-1}\varphi(\varepsilon^{2n-1})}{x-\varepsilon^{2n-1}}\right].$$

128) $$\int \frac{\varphi(x)}{x^n+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\varepsilon\varphi(\varepsilon)\lg(x-\varepsilon)+\varepsilon^3\varphi(\varepsilon^3)\lg(x-\varepsilon^3)+\cdots\varepsilon^{2n-1}\varphi(\varepsilon^{2n-1})\lg(x-\varepsilon^{2n-1})\right].$$

Ist $\varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k) = A + Bi$, so ist der conjugirte Werth $\varepsilon^{n-1-k}\varphi(\varepsilon^{n-1-k}) = A - Bi$, und die entsprechenden Glieder des Integrales lassen sich wiederum zu reellen Werthen vereinigen.

$$(A+Bi)\lg\left(x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)+$$

$$+(A-Bi)\lg\left(x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)=$$

$$= A\lg\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+1\right)-2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi}.$$

129) $$\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+1}\,dx = 2\lg(x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

130) $$\int\frac{x^2}{x^4+1}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)-\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1)\right]$$

131) $$\int\frac{x^5+x^2+4}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{6}\left[\lg(x^6+1)-2\sqrt{3}\lg\frac{(2x-\sqrt{3})^2+1}{(2x+\sqrt{3})^2+1}+\right.$$

$$\left.+6\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3-2x}{2x^2-1}\right]$$

132) $$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\left[(a-b+c)\lg(x+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(2a+b-c)\lg(x^2-x+1)+(b+c)\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

133) $$\int\frac{1}{x^6-1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\lg\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\lg\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

134) $$\int\frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

135) $$\int\frac{x^5}{(x^3+1)^2}\,dx = \frac{1}{3}\lg(x^3+1)+\frac{1}{3(x^3+1)}.$$

§ 8. Reductionsformeln.

Verwickelte Integrale können oft durch sogenannte Reductionen auf einfachere Formen gebracht werden, und wir wollen einige dazu dienliche Formeln jetzt aufstellen.

Reductionsformeln für: $\int \frac{1}{(a+bx+cx^2)^n}\,dx$.

Setzt man $a+bx+cx^2=t$, so ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{b+2cx}{t^n}\right)=\frac{2c}{t^n}-\frac{n(b+2cx)^2}{t^{n+1}}.$$

Da $(b+2cx)^2$ durch $4ct-(4ac-b^2)$ ersetzt werden kann, so ist auch:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{b+2cx}{t^n}\right)=\frac{(4ac-b^2)n}{t^{n+1}}-\frac{2c(2n-1)}{t^n}.$$

Wird diese Gleichung Glied für Glied integrirt, und $n-1$ statt n gesetzt, so kann ihr folgende Form gegeben werden:

136) $$\int\frac{1}{t^n}dx=\frac{b+2cx}{(n-1)(4ac-b^2)t^{n-1}}+\frac{(2n-3)2c}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{1}{t^{n-1}}dx.$$

Für $b=0$ und $c=1$ entsteht die speciellere Formel:

137) $$\int\frac{1}{(x^2+a)^n}dx=\frac{1}{2(n-1)a}\cdot\frac{x}{(x^2+a)^{n-1}}+$$
$$+\frac{2n-3}{2(n-1)a}\int\frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}dx.$$

Behält t seine Bedeutung, so ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{m-1}}{t^n}\right)=(m-1)\frac{x^{m-2}}{t^n}-\frac{nx^{m-1}(b+2cx)}{t^{n+1}}=$$
$$=\frac{(m-1)x^{m-2}t-nx^{m-1}(b+2cx)}{t^{n+1}}=$$
$$=(m-1)a\frac{x^{m-2}}{t^{n+1}}-(n-m+1)b\frac{x^{m-1}}{t^{n+1}}-(2n-m+1)c\frac{x^m}{t^{n+1}}.$$

Wird wieder Glied für Glied integrirt, so kann die Gleichung in folgende Form gebracht werden:

138) $$\int\frac{x^m}{t^{n+1}}dx=-\frac{1}{(2n-m+1)c}\cdot\frac{x^{m-1}}{t^n}-$$
$$-\frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c}\int\frac{x^{m-1}}{t^{n+1}}dx+\frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c}\int\frac{x^{m-2}}{t^{n+1}}dx.$$

Wie wir sehen, zerlegt diese Formel das vorgelegte Integral in einen fertig gestellten Theil und zwei noch auszuführende Integrale, bei welchen der Nenner t^{n+1} unverändert geblieben, der Exponent des Zählers aber um 1 und 2 kleiner geworden ist. Die Formel kömmt in Anwendung, wenn m positiv ist. Sie lässt sich aber auch leicht so umsetzen, dass das letzte Integral rechts zur Aufgabe wird. Nach dieser Umformung ist sie brauchbar für ein negatives m. Gewöhnlich wird aber in diesem Falle durch die Substitution $x = \frac{1}{z}$ das Integral transformirt, oder vor der Integration die Zerlegung in Partialbrüche ausgeführt.

Die Reductionsformeln für: $\int x^n (a + bx^m)^p dx.$

$$\frac{d}{dx}[x^n (a + bx^m)^p] = nx^{n-1}(a + bx^m)^p + mbp(a + bx^m)^{p-1} x^{m+n-1}.$$

$$x^{n-1}(a + bx^m)^p = ax^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} + bx^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1}$$

ist eine identische Gleichung, durch deren Vermittelung man erhält:

$$\frac{d}{dx}[x^n (a + bx^m)^p] = nax^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} + \\ + b(mp + n) x^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1}.$$

Das Integral dieser Gleichung kommt in 2 verschiedenen Formen zur Anwendung:

139) $$\int x^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx = \frac{x^n (a + bx^m)^p}{na} - \\ - \frac{b(mp + n)}{na} \int x^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx$$

140) $$\int x^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx = \frac{x^n (a + bx^m)^p}{b(mp + n)} - \\ - \frac{na}{b(mp + n)} \int x^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx.$$

Je nach der Absicht, den Exponenten von x um m Einheiten zu vergrössern oder zu verkleinern, muss die eine oder die andere Formel Anwendung finden. Die Potenz des Binoms bleibt unverändert.

$$\frac{d}{dx}[x^n(a+bx^m)^p] = nx^{n-1}(a+bx^m)^p + \\ + bmpx^{m+n-1}(a+bx^m)^{p-1}.$$

$$bx^{m+n-1} = x^{n-1}(a+bx^m) - ax^{n-1};$$

$$\frac{d}{dx}[x^n(a+bx^m)^p] = (mp+n)x^{n-1}(a+bx^m)^p - \\ - ampx^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}.$$

Aus den Integralwerthen dieser Gleichung lassen sich die folgenden Formeln zusammensetzen:

141) $$\int x^{n-1}(a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^n(a+bx^m)^p}{mp+n} + \\ + \frac{amp}{mp+n}\int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx$$

142) $$\int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx = -\frac{x^n(a+bx^m)^p}{amp} + \\ + \frac{mp+n}{amp}\int x^{n-1}(a+bx^m)^p\,dx.$$

Während die zweite Formel dazu dient, den Exponenten p um 1 zu vergrössern, wird derselbe durch die erste um 1 verkleinert.

§ 4. Irrationale algebraische Funktionen.

$$\int f(x,\ \sqrt[n]{a+bx})\,dx.$$

Ein solches Integral wird rational durch die Substitution:

$$\sqrt[n]{a+bx} = z,\quad x = \frac{z^n-a}{b},\quad dx = \frac{nz^{n-1}}{b}\,dz.$$

$$S = \int x\sqrt{a+bx}\,dx;\quad a+bx = z^2,\quad x = \frac{z^2-a}{b},$$

$$dx = \frac{2z}{b}\,dz;\quad S = \frac{2}{b^2}\int(z^4 - az^2)\,dz = \frac{2}{b^2}\left(\frac{z^5}{5} - \frac{az^3}{3}\right).$$

143) $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{b^2}\sqrt{(a+bx)^3}\left(\frac{a+bx}{5} - \frac{a}{3}\right).$$

Das Integral kann auch mittelst der Integration nach Theilen ausgeführt werden:

$$\int z(a+bx)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2(a+bx)^{\frac{1}{2}}x}{3b} - \frac{2}{3b}\int(a+bx)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2(a+bx)^{\frac{1}{2}}x}{3b} - \frac{2}{3b}\cdot\frac{2}{5b}(a+bx)^{\frac{5}{2}}.$$

144) $\int x(a+bx)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{5b^2}\sqrt{(a+bx)^5}\left(bx-\frac{2a}{3}\right)$

145) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = 3\int (z^3-1)^3 z\,dz = 3\left(\frac{z^8}{8}-\frac{2z^5}{5}+\frac{z^2}{2}\right) =$

$= 3\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1}{8}(1+x)^3-\frac{2}{5}(1+x)+\frac{1}{2}\right)$

146) $\int \frac{1}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$

147) $\int \frac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}\,dx = \frac{n}{(n-p)\,b\sqrt[n]{(a+bx)^{p-n}}}$

148) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}\,dx = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2}$

149) $\int x\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3}{28b^2}(4bx-3a)\sqrt[3]{(a+bx)^4}$

150) $\int x^2\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^3}{10}-\frac{2a}{7}(a+bx)^2+\right.$

$\left.+\frac{a^2}{4}(a+bx)\right]\sqrt[3]{a+bx}$

151) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{a+bx}}\,dx = \frac{4}{21b^2}(3bx-4a)\sqrt[4]{(a+bx)^5}$

152) $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \frac{3}{7}(x^2-x-12)\sqrt[3]{x-4}$

153) $\int \frac{x^3}{3\sqrt[3]{x+2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{8}+\frac{9-3x}{10}\right)\sqrt[3]{(x+2)^2}$

154) $\int \frac{x^3}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \frac{2}{27}\left(\frac{9x^2}{5}-4x+\frac{40}{3}\right)\sqrt{5+3x}$

155) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x}+\lg\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

156) $\int \frac{1}{x\sqrt{a+x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\lg\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}$

157) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{a}}$

158) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\lg\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}$

159) $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}; \quad a>0$

160) $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + x - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \operatorname{arc\,tg} \sqrt[6]{x}$

161) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}\,dx = -\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - (x+1) - \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

Man setze $x+1 = z^6$.

162) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{1+x} + \lg \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$

163) $\int \frac{1}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}\,dx = \frac{1}{b-a}\int (\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})\,dx = \frac{2}{3(b-a)}\left[(x-a)^{\frac{3}{2}} + (x-b)^{\frac{3}{2}}\right]$

164) $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right]$

165) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -\left(x + 4\sqrt{x} + 4\lg(1-\sqrt{x})\right)$

166) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = 2\lg(1+\sqrt{x})$

167) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = 4\sqrt{1+\sqrt{x}}\left[\frac{(1+\sqrt{x})^2}{5} - \frac{1+\sqrt{x}}{3}\right]$

168) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6\lg(1+\sqrt[6]{1+x})$

169) $\int \frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b\beta}\sqrt{a+bx} - \frac{2\alpha}{b\beta^2}\lg(\alpha+\beta\sqrt{a+bx})$

170) $\int \frac{1}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}\,dx = 2\int \frac{1}{\alpha b - a\beta + \beta z^2}\,dz.$

Die weitere Ausführung hängt von den besonderen Werthen für a, b, α, β ab. Hier ist $z^2 = a+bx$.

Bei derartigen Aufgaben kann man zweckmässig vor der Substitution die Integration nach Theilen vornehmen, um dadurch etwas hohe Werthe von n zu reduciren. Die folgenden Beispiele dienen zur Anleitung.

171) $$\int x^n \sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}} x^n - \frac{2n}{3b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

172) $$\int x^n \sqrt[3]{a+bx}\, dx = \frac{3(a+bx)^{\frac{4}{3}} x^n}{4b} - \frac{3n}{4b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{4}{3}}\, dx$$

173) $$\int \frac{x^n}{\sqrt[3]{a+bx}}\, dx = \frac{3(a+bx)^{\frac{2}{3}} x^n}{2b} - \frac{3n}{2b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{2}{3}}\, dx.$$

$$\int \frac{A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\, dx.$$

Mit Hülfe des Satzes von den unbestimmten Coefficienten kann ein solches Integral in einen fertigen Theil und in ein noch auszuführendes Integral zerlegt werden. Wie dies geschieht, wollen wir an einem Beispiele zeigen.

174) $$\int \frac{30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}\, dx =$$

$$= (\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\sqrt{4+2x+3x^2} + K\int \frac{1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}\, dx$$

worin die α und K noch unbestimmte Coefficienten sind. Zu dieser identischen Gleichung werden wir durch die Thatsache berechtigt, dass auf beiden Seiten der Form nach völlig gleiche Ausdrücke entstehen, wenn wir wieder differentiiren. Man erhält dann:

$$\frac{30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1}{\sqrt{4+2x+3x^2}} =$$

$$= (4\alpha_4 x^3 + 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1)\sqrt{4+2x+3x^2} + \frac{(1+3x)(\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) + K}{\sqrt{4+2x+3x^2}}.$$

$$30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1 =$$

$$= (4\alpha_4 x^3 + 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1)(3x^2 + 2x + 4) + (1+3x)(\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) + K.$$

Der Satz von den unbestimmten Coefficienten führt zu den Werthen der α. Es ist: $30 = 15\alpha_4$, $\alpha_4 = 2$; $30 = 12\alpha_3 + 9\alpha_4$, $\alpha_3 = 1$; $12 = 9\alpha_2 + 7\alpha_3 + 16\alpha_4$, $\alpha_2 = -3$; $21 = 6\alpha_1 + 5\alpha_2 + 12\alpha_3$, $\alpha_1 = 4$; $-15 = 3\alpha_0 + 3\alpha_1 + 8\alpha_2$, $\alpha_0 = -1$; $-1 = K + 4\alpha_1 + \alpha_0$, $K = -16$.

175) $$\int \frac{30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}}\, dx =$$

$$= (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 1)\sqrt{4 + 2x + 3x^2} - 16\int \frac{1}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}}\, dx.$$

Bevor wir uns mit der weiteren Ausführung des übrig gebliebenen Integrales beschäftigen, sollen zur Berechnung des anderen Theiles allgemein gültige Formeln aufgestellt werden, und wir wählen dazu als Zähler eine Funktion von ganz beliebigem Grade. Der einfacheren Darstellung wegen nennen wir diesen Grad nur nicht n, sondern wählen dafür eine beliebige Zahl, z. B. $n = 9$.

176) $$\int \frac{A_9 x^9 + A_8 x^8 + \ldots + A_1 x + A_0}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\, dx =$$

$$= (\alpha_8 x^8 + \alpha_7 x^7 + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)\sqrt{a + 2bx + cx^2} + K\int \frac{1}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\, dx.$$

Wird diese Gleichung differentiirt und der Nenner durch Multiplication beseitigt, so erhält man:

$$A_9 x^9 + A_8 x^8 + A_7 x^7 + \ldots A_1 x + A_0 =$$
$$= (8\alpha_8 x^7 + 7\alpha_7 x^6 + \ldots + \alpha_1)(a + 2bx + cx^2) +$$
$$+ (\alpha_8 x^8 + \alpha_7 x^7 + \alpha_6 x^6 + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)(b + cx) + K,$$

und durch Vergleich der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
A_9 &= 9c\alpha_8 \\
A_8 &= 8c\alpha_7 + 17b\alpha_8 \\
A_7 &= 7c\alpha_6 + 15b\alpha_7 + 8a\alpha_8 \\
A_6 &= 6c\alpha_5 + 13b\alpha_6 + 7a\alpha_7 \\
A_5 &= 5c\alpha_4 + 11b\alpha_5 + 6a\alpha_6 \\
A_4 &= 4c\alpha_3 + 9b\alpha_4 + 5a\alpha_5
\end{aligned} \qquad (10)$$

$$A_3 = 3ca_2 + 7ba_3 + 4aa_4$$
$$A_2 = 2ca_1 + 5ba_2 + 3aa_3$$
$$A_1 = 1ca_0 + 3ba_1 + 2aa_2$$
$$A_0 = 1ba_0 + 1aa_1 + K.$$

Aus diesen sehr übersichtlichen Gleichungen werden die Coefficienten a und K berechnet. Selbstverständlich kann unter den A eine Anzahl den Werth Null besitzen.

Die Ermittelung des übrig gebliebenen Integrales ist eine ganz verschiedene, je nachdem c positiv oder negativ ist. Wir untersuchen zuerst:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx, \quad \text{wenn } c>0, \text{ und setzen}$$

$\sqrt{a+2bx+cx^2} = x\sqrt{c}+z$, finden $dx = \frac{x\sqrt{c}+z}{b-z\sqrt{c}}\,dz$ und

177) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \int \frac{1}{b-z\sqrt{c}}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b-z\sqrt{c})$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b+cx-\sqrt{c}\,\sqrt{a+2bx+cx^2})$$
$$\text{oder} \quad = \frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b+cx+\sqrt{c}\,\sqrt{a+2bx+cx^2}),$$

je nachdem $\sqrt{c}$ mit dem + oder — Vorzeichen genommen wird. Dass die beiden Werthe, wie es sein muss, nur um eine Constante, nämlich um $\frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b^2-ac)$ differiren, ist leicht nachzuweisen.

Für $c<0$ ist die Formel unbrauchbar, so dass dieser Fall besonders behandelt werden muss.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx, \quad \text{wenn } c<0.$$

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{(b^2-ac)-(b+cx)^2}}\,dx.$$

Man setzt $z = \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}$, $dx = \frac{1}{c}\sqrt{b^2-ac}\,dz$ und findet:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin z.$$

178) $\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}$.

Die angeführte Transformation wird unmöglich, wenn $b^2-ac=0$ ist. Dann ist aber $\sqrt{a+2bx+cx^2} = x\sqrt{c}+\sqrt{a}$, und das Integral leicht ausführbar. Da c negativ ist, so kann b^2-ac nur negativ werden, wenn auch a negativ ist. Wir setzen dann $-a=\alpha$, $-c=\gamma$, erhalten $\sqrt{a+2bx+cx^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\alpha-2bx+\gamma x^2}$, und führen die Integration nach der ersten Formel aus. Das Integral ist imaginär.

In den Resultaten der nachfolgenden Aufgaben ist der in der Aufgabe vorkommende Wurzelwerth häufig kurzweg durch R bezeichnet.

179) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3}+\frac{25}{12}x-\frac{163}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \\ + \frac{85}{16}\lg\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$

180) $\int \frac{4x^4+15x^3-9x^2+14x+46}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx = (x^3-2x^2+3x+7)R + \\ + 10\lg(3+x+R)$

181) $\int \frac{5x^2-2x+10}{\sqrt{3x^2-5x+8}}\,dx = \left(\frac{5}{6}x+\frac{17}{12}\right)R + \\ + \frac{55}{8\sqrt{3}}\lg\left(3x-\frac{5}{2}+\sqrt{3}\,R\right)$

182) $\int \frac{x^3+4x^2-6x+3}{\sqrt{5+6x-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^2}{3}+\frac{9x}{2}+\frac{227}{6}\right)R - \\ - 139 \arcsin\frac{3-x}{\sqrt{14}}$

183) $\int \frac{-45x^3+20x^2+65x+54}{\sqrt{7+8x-5x^2}}\,dx = (3x^2+4x+5)R - \\ - \frac{6}{\sqrt{5}} \arcsin\frac{4-5x}{\sqrt{51}}$

184) $\int \frac{mx^2+nx+p}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{mx}{2c}+\frac{2cn-3bm}{2c^2}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2} \\ + \left(p-\frac{2bcn-3b^2m+acm}{2c^2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$

185) $$\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \int \frac{cx^2+2bx+a}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)R + \left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

186) $$\int \sqrt{3x^2+10x+9}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right)R - \frac{1}{\sqrt{27}}\ln\left(3x+5+\sqrt{3}\,R\right)$$

187) $$\int \sqrt{11-12x-3x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)R - \frac{31}{8\sqrt{3}}\arcsin\frac{3-4x}{\sqrt{31}}$$

188) $$\int x\sqrt{3-x-x^2}\,dx = \int \frac{-x^3+x^2+3x}{\sqrt{3-x-x^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}-\frac{67}{24}\right)R - \frac{33}{16}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{33}}$$

189) $$\int \frac{x}{\sqrt{a-2bx-cx^2}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{a-2bx+cx^2} -$$
$$-\frac{b}{c}\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx-cx^2}}\,dx$$

190) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a-2bx-cx^2}}\,dx = \left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{2c^2}\right)R + \frac{3b^2-ac}{2c^2}\int \frac{1}{R}\,dx$$

191) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{a+2bx-cx^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3c}-\frac{5bx}{6c^2}+\frac{5b^2}{2c^3}-\frac{2a}{3c^2}\right)R +$$
$$-\left(\frac{3ab}{2c^2}-\frac{5b^3}{2c^3}\right)\int \frac{1}{R}\,dx$$

192) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{3-2x+x^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{4}-\frac{7x}{12}-\frac{1}{3}-\frac{5}{8}\right)R -$$
$$-\frac{5}{8}\ln\left|1-x-R\right|$$

193) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x-3x^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{9}-\frac{x}{36}-\frac{1}{108}+\frac{7x}{216}-\frac{13}{432}\right)R -$$
$$-\frac{1}{192\sqrt{3}}\ln\left|1-3x-\sqrt{3}\,R\right|$$

194) $$\int x\sqrt{3-2bx-cx^2}\,dx = \int \frac{cx^3-2bx^2+3x}{\sqrt{3-2bx-cx^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{5}-\frac{bx}{5c}-\frac{3}{5c}-\frac{b^2}{5c^2}\right)R - \left(\frac{b^3}{5c^3}-\frac{3b}{5c^2}\right)\int \frac{1}{R}\,dx$$

195) $$\int \sqrt{(5x^2+4x+3)^3}\,dx = \int \frac{25x^4+40x^3+46x^2+24x+9}{\sqrt{5x^2+4x+3}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{5x^3}{4}+\frac{3x^2}{2}+\frac{79x}{40}+\frac{63}{100}\right)R+\frac{363}{200\sqrt{5}}\lg(2+5x+\sqrt{5}R)$$

196) $$\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx = \int \frac{(2x-5)(2+3x-x^2)}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{2x^2}{3}-3x+\frac{1}{6}\right)R+\frac{17}{4}\arcsin\frac{3-2x}{\sqrt{17}}$$

197) $$\int (x^2-3x+5)\sqrt{3x^2-2x+6}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{4}-\frac{37x^2}{36}+\frac{625}{216}x-\frac{503}{216}\right)R+\frac{2227}{216\sqrt{3}}\lg(3x-1+\sqrt{3}R)$$

198) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \pm\frac{1}{\sqrt{b}}\lg\left(bx\pm\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$$

199) $$\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

200) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\lg\left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{2bx+cx^2}\right)$$

201) $$\int \frac{1}{\sqrt{2bx-cx^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{b-cx}{b}$$

202) $$\int \sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}\lg\left(bx+\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$$

203) $$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

204) $$\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{a+x}{2}R-\frac{a^2}{2}\lg(a+x+R)$$

205) $$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}R-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a-x}{a}$$

206) $$\int x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \left(\frac{x^3}{4}-\frac{ax^2}{12}-\frac{5a^2x}{24}-\frac{5a^3}{8}\right)R-$$
$$-\frac{5a^4}{8}\arcsin\frac{a-x}{a}.$$

Die Relationen (10) führen leicht zu den folgenden Formeln:

207) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = (a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots a_1 x + a_0)\sqrt{a+bx^2} + K\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx.$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{nb};\quad a_{n-2} = 0;\quad a_{n-3} = -\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{a}{b}\,a_{n-1};\quad a_{n-4} = 0;$$

$$a_{n-5} = -\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{a}{b}\,a_{n-3};\quad a_{n-5} = 0;\quad a_{n-7} = -\frac{n-5}{n-6}\cdot\frac{a}{b}\,a_{n-5}\ \text{u.s.w.}$$

$K = -a\,a_1$, so dass für ungerade n stets $K = 0$ ist.

208) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2}$$

209) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{x}{2b}\sqrt{a+bx^2} - \frac{a}{2b\sqrt{b}}\lg(bx+\sqrt{b}\,R)$$

210) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{a+bx^2}$$

211) $$\int \frac{x^4}{\sqrt{4+5x^2}}\,dx = \left(\frac{x^3}{20} - \frac{3x}{50}\right)R + \frac{6}{25\sqrt{5}}\lg(5x+\sqrt{5}\,R)$$

212) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx = \left(\frac{x^4}{10} - \frac{x^3}{5} + \frac{3}{5}\right)\sqrt{3+2x^2}.$$

Das Integral (207) kann auch mittelst einer Reductionsformel ausgeführt werden.

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\int x^{n-1}\,\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b}\,x^{n-1}\sqrt{a+bx^2} - \frac{n-1}{b}\int x^{n-2}\sqrt{a+bx^2}\,dx$$

$$\int x^{n-2}\sqrt{a+bx^2}\,dx = a\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx + b\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx.$$

213) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{nb}\,x^{n-1}\sqrt{a+bx^2} - \frac{(n-1)a}{nb}\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx$$

$$\left(\frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{40} + \frac{9x}{400}\right)\sqrt{3-5x^2} + \frac{27}{400\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x}{\sqrt{15}}.$$

gerade Zahl, so ist:

215) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots + \frac{3}{2}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cdots\frac{3}{2}\arcsin x$$

216) $$\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{16}\arcsin x.$$

Wenn n eine ungerade Zahl, so ist:

217) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \cdots\right)\sqrt{1-x^2}$$

218) $$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^6}{7} + \frac{6x^4}{35} + \frac{8x^2}{35} + \frac{16}{35}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

$$S = \int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Durch die Substitution $x - \alpha = \frac{1}{z}$ verwandelt sich S in folgendes Integral:

$$S = -\int \frac{1}{\sqrt{c + 2(b+c\alpha)z + (a+2b\alpha+c\alpha^2)z^2}}\,dz.$$

Je nachdem der Coefficient von z^2 positiv oder negativ ist, ist der Werth dieses Integrales verschieden.

1) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 > 0$ und $= m$ gesetzt:

219) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx =$$
$$= \mp\frac{1}{\sqrt{m}}\lg\frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x \pm \sqrt{m}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x-\alpha}.$$

2) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 < 0$ und $= m$:

220) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-m}}\arcsin\frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x}{(x-\alpha)\sqrt{b^2-ac}}.$$

Ist endlich 3) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 = 0$

so ist α eine Wurzel von $a + 2bx + cx^2 = 0$. Nennen wir die

andere Wurzel β, so ist $c(x-\alpha)(x-\beta) = cx^2 + 2bx + a$. Wird endlich $(x-\alpha) = z^2$ gesetzt, so ist $(x-\beta) = (z^2+\alpha-\beta)$ und

$$S = \frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{1}{z^2 \sqrt{z^2+\alpha-\beta}}\, dz.$$

Durch die weitere Substitution $z = \frac{1}{u}$ geht S über in:

$$S = -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{u}{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2+1}}\, du = -\frac{2}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2+1}}{\alpha-\beta}$$

und daraus durch die umgekehrten Substitutionen:

$$S = -\frac{2}{c} \frac{\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)} = -\frac{2}{c} \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)}.$$

Da ferner $\alpha+\beta = -\frac{2b}{c}$ ist, so kann $\alpha-\beta = 2\frac{b+c\alpha}{c}$ gesetzt werden. So wird schliesslich:

221) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(b+c\alpha)(x-\alpha)}$$

222) $$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \lg \frac{2x+4+\sqrt{6}R}{x-1}$$

223) $$\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x+5}{(x-2)\sqrt{8}}$$

224) $$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Wenn $a > 0$ ist, so ist:

225) $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}.$$

Wenn $a < 0$ ist, so ist:

226) $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{a+bx}{x\sqrt{b^2-ac}}$$

227) $$\int \frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$$

228) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx = \lg \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

229) $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx = \arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{5}}$$

230) $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\arcsin\frac{1}{x}.$$

$$S = \int \frac{1}{(x-\alpha)^n\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Durch die Substitution $x-\alpha = \frac{1}{z}$ erhält man:

$$S = -\int \frac{z^{n-1}}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)z+(a+2b\alpha+c\alpha^2)z^2}}\,dz.$$

231) $$\int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}\right)\sqrt{3-2x^2} + 7\lg\frac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1}$$

232) $$\int \frac{1}{(x-2)^4\sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = \left(\frac{1}{9(x-2)^3}+\frac{2}{27(x-2)}\right)R$$

233) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

234) $$\int \frac{1}{x^3\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{-1}{2ax^2}+\frac{3b}{2a^2x}\right)R + \left(\frac{3b^2}{2a^2}-\frac{c}{2a}\right)\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

235) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = -\frac{1}{x}R + 2\lg\frac{1-2x-R}{x}$$

236) $$\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2}\lg\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

237) $$\int \frac{1}{x^4\sqrt{3-2x+x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{9x^3}+\frac{5}{54x^2}+\frac{1}{54x}\right)R - \frac{2}{27\sqrt{3}}\lg\frac{3-x-\sqrt{3}\,R}{x}$$

238) $$\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}\,dx = \int \frac{b+cx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx +$$
$$+ a\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx + b\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$
$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Man zerlegt $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche und damit das ganze Integral in eine Summe integrirbarer Theile.

239) $$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x-7}}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2}\right)\frac{1}{R}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \lg \frac{11x-1-\sqrt{32}\,R}{x-3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{4x+11}{5(x+2)}$$

240) $$\int \frac{4x+17}{x^2+x-6} \cdot \frac{1}{\sqrt{5-2x^2}}\,dx = \frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{5-4x}{(x-2)\sqrt{10}} -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{13}} \arcsin \frac{6x+5}{(x+3)\sqrt{10}}$$

241) $$\int \frac{3x-5}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1} +$$
$$+ \frac{17}{5\sqrt{5}} \lg \frac{x+4-\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}$$

242) $$\int \frac{1}{(x^2-9)\sqrt{5+6x-7x^2}}\,dx = \frac{1}{6\sqrt{40}} \arcsin \frac{7-9x}{(x-3)\sqrt{11}} -$$
$$- \frac{1}{6\sqrt{76}} \arcsin \frac{12x-2}{(x+3)\sqrt{11}}.$$

$$S = \int \frac{1}{(x-p-qi)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Dieses Integral geht hervor aus (219), wenn man $\alpha = p + qi$ setzt. Dann ist auch $m = a + 2bp + c(p^2-q^2) + 2q(b+cp)i$. Setzen wir $m = \varrho(\cos t + i \sin t)$, oder $\varrho \cos t = a + 2bp + c(p^2-q^2)$, $\varrho \sin t = 2q(b+cp)$, so sind ϱ und t bestimmbar. Zugleich ist:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{t}{2} + i \sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i \sin\frac{t}{2}\right).$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right)\lg\left[a + bp + (b+cp)x - \sqrt{\varrho}\cos\frac{t}{2}R + \right.$$
$$\left. + \{(b+cx)q - \sqrt{\rho}\sin\frac{t}{2}R\}i\right] - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right)\lg(x-p-qi).$$

Wenn nun das vorstehende Integral bei der Zerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche entstanden ist, so muss noch ein zweites existiren, welches sich von diesem nur durch das Vorzeichen von i unterscheidet. In abgekürzter Bezeichnung mögen beide heissen:

$$S = (A + Bi)\lg(P + Qi) - (A + Bi)\lg(x - p - qi)$$
$$S_1 = (A - Bi)\lg(P - Qi) - (A - Bi)\lg(x - p + qi)$$
$$S + S_1 = A\lg(P^2 + Q^2) + 2B\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q} - A\lg[(x-p)^2 + q^2] +$$
$$+ 2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}.$$

Setzt man $x^2 = z$, so ist:

243) $$\int\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}dz =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

244) $$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$
$$= -\sqrt{a^2-x^2} + a\,.\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}.$$

Setzt man $x^3 = z^2$, so ist:

245) $$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx = \frac{2}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{a^3-z^2}} = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}.$$

Man setze $x^2 = z$ in:

246) $$\int x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}dx = \int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx + \int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz + \frac{1}{2}\int\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}dz =$$
$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\sqrt{1-x^4} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}x^2$$

247) $$\int (x+\sqrt{1+x^2})^n\,dx = \frac{1}{2}\int (z^n + z^{n-2})\,dz \text{ für } z = x+\sqrt{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{n-1}\right].$$

§ 5. Exponential- und logarithmische Funktionen.

$$\int f(e^x)\,dx.$$

Diese Funktionen werden integrirbar durch die Substitution $z = e^x$.

248) $$\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}$$

249) $$\int (e^{3x} + \sqrt{e^x})\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + 2\sqrt{e^x}$$

250) $$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz = 2\lg(e^x+1) - x$$

251) $$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \operatorname{arc\,tg} e^x$$

252) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+be^x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{a+be^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x} + \sqrt{a}};\quad z = \sqrt{a+be^x}$$

253) $$\int \frac{1}{e^x}\,dx = -\frac{1}{e^x}$$

254) $$\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3}$$

255) $$\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{e^x-1}$$

256) $$\int (e^x + e^{-x})^2\,dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x$$

257) $$\int \frac{e^x}{e^x + a}\,dx = \lg(e^x + a)$$

258) $$\int \frac{4e^x + 6e^{-x}}{9e^x - 4e^{-x}}\,dx = \frac{35}{36}\lg\left(e^{2x} - \frac{4}{9}\right) - \frac{3x}{2}$$

259) $$\int \frac{1}{e^x + e^{2x}}\,dx = \lg(1+e^x) - \frac{1}{e^x} - x$$

260) $$\int \frac{e^x}{(e^x+a)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(e^x+a)^{n-1}}.$$

$$\int f(x, e^x)\, dx.$$

Neben der Substitution wird bei diesen Funktionen auch das Integriren nach Theilen oft mit Vortheil angewendet.

261) $\int e^x x^4\, dx = e^x x^4 - 4\int e^x x^3\, dx$

262) $\int e^x x^3\, dx = e^x x^3 - 3\int e^x x^2\, dx$

u. s. w.

263) $\int e^x x^4\, dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$

264) $\int e^x x^n\, dx = e^x (x^n - n x^{n-1} + n[n-1] x^{n-2} + \cdots)$

265) $\int e^{mx} x^n\, dx = \frac{e^{mx} x^n}{m} - \frac{n}{m}\int e^{mx} x^{n-1}\, dx$

266) $\int (a+bx)^n e^{mx}\, dx = \frac{e^{mx}(a+bx)^n}{m} - \frac{nb}{m}\int e^{mx}(a+bx)^{n-1}\, dx$

Diese Reductionsformel ist für positive und negative m gleichmässig anwendbar. Man kann sie auch umkehren und $-p$ für $n-1$ setzen.

267) $\int (a+bx)^{-p} e^{mx}\, dx = -\frac{e^{mx}(a+bx)^{-p+1}}{(p-1)b} + \frac{m}{(p-1)b}\int e^{mx}(a+bx)^{-p+1}\, dx.$

Für $p = 1$ ist diese Formel nicht mehr brauchbar, das Integral muss dann durch Reihenentwickelung weiter geführt werden.

268) $\int \frac{e^x}{x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots\right) dx =$

$$= \lg x + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \cdots$$

269) $\int x^4 e^{2x}\, dx = e^{2x}\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right)$

270) $\int x^3 e^{-x}\, dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$

271) $\int \frac{e^x}{x^4}\, dx = -e^x\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6x}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^x}{x}\, dx$

185) $$\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \int \frac{cx^2+2bx+a}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)R + \left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

186) $$\int \sqrt{3x^2+10x+9}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right)R + \frac{1}{\sqrt{27}}\lg(3x+5+\sqrt{3}\,R)$$

187) $$\int \sqrt{11+12x-8x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)R - \frac{31}{8\sqrt{2}}\arcsin\frac{3-4x}{\sqrt{31}}$$

188) $$\int x\sqrt{8+x-x^2}\,dx = \int \frac{-x^3+x^2+8x}{\sqrt{8+x-x^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}-\frac{67}{24}\right)R - \frac{33}{16}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{33}}$$

189) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} -$$
$$- \frac{b}{c}\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

190) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{2c^2}\right)R + \frac{3b^2-ac}{2c^2}\int \frac{1}{R}\,dx$$

191) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3c}-\frac{5bx}{6c^2}+\frac{5b^2}{2c^3}-\frac{2a}{3c^2}\right)R +$$
$$+ \left(\frac{3ab}{2c^2}-\frac{5b^3}{2c^3}\right)\int \frac{1}{R}\,dx$$

192) $$\int \frac{x^4}{\sqrt{3+2x+x^2}}\,dx = \left(\frac{x^3}{4}-\frac{7x^2}{12}+\frac{x}{3}+\frac{5}{2}\right)R -$$
$$- \frac{7}{2}\lg(1+x+R)$$

193) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+2x+3x^2}}\,dx = \left(\frac{x^4}{15}-\frac{x^3}{20}+\frac{x^2}{108}+\frac{7x}{405}-\frac{19}{810}\right)R +$$
$$+ \frac{1}{162\sqrt{3}}\lg(1+3x+\sqrt{3}\,R)$$

194) $$\int x\sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \int \frac{cx^3+2bx^2+ax}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^2}{3}+\frac{bx}{6c}+\frac{a}{3c}-\frac{b^2}{2c^2}\right)R + \left(\frac{b^3}{2c^2}-\frac{ab}{2c}\right)\int \frac{1}{R}\,dx$$

195) $$\int \sqrt{(5x^2+4x+3)^3}\,dx = \int \frac{25x^4+40x^3+46x^2+24x+9}{\sqrt{5x^2+4x+3}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{5x^3}{4}+\frac{3x^2}{2}+\frac{79x}{40}+\frac{63}{100}\right)R+\frac{363}{200\sqrt{5}}\lg(2+5x+\sqrt{5}\,R)$$

196) $$\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx = \int \frac{(2x-5)(2+3x-x^2)}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx =$$
$$= \left(\frac{2x^2}{3}-3x+\frac{1}{6}\right)R+\frac{17}{4}\arcsin\frac{3-2x}{\sqrt{17}}$$

197) $$\int (x^2-3x+5)\sqrt{3x^2-2x+6}\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{4}-\frac{37x^2}{36}+\frac{625}{216}x-\frac{503}{216}\right)R+\frac{2227}{216\sqrt{3}}\lg(3x-1+\sqrt{3}\,R)$$

198) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \pm\frac{1}{\sqrt{b}}\lg\left(bx \pm \sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$$

199) $$\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

200) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\lg\left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{2bx+cx^2}\right)$$

201) $$\int \frac{1}{\sqrt{2bx-cx^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{b-cx}{b}$$

202) $$\int \sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}\lg\left(bx+\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$$

203) $$\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

204) $$\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{a+x}{2}R-\frac{a^2}{2}\lg(a+x+R)$$

205) $$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}R-\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a-x}{a}$$

206) $$\int x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \left(\frac{x^3}{4}-\frac{ax^2}{12}-\frac{5a^2x}{24}-\frac{5a^3}{8}\right)R -$$
$$-\frac{5a^4}{8}\arcsin\frac{a-x}{a}.$$

Die Relationen (10) führen leicht zu den folgenden Formeln:

207) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = (\alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0)\sqrt{a+bx^2} + K\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx.$$

$\alpha_{n-1} = \frac{1}{nb}$; $\alpha_{n-2} = 0$; $\alpha_{n-3} = -\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{a}{b}\alpha_{n-1}$; $\alpha_{n-4} = 0$;

$\alpha_{n-5} = -\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{a}{b}\alpha_{n-3}$; $\alpha_{n-6} = 0$; $\alpha_{n-7} = -\frac{n-5}{n-6}\cdot\frac{a}{b}\alpha_{n-5}$ u. s. w.

$K = -a\alpha_1$, so dass für ungerade n stets $K = 0$ ist.

208) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2}$$

209) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{x}{2b}\sqrt{a+bx^2} - \frac{a}{2b\sqrt{b}}\lg(bx+\sqrt{b}\,R)$$

210) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{a+bx^2}$$

211) $$\int \frac{x^4}{\sqrt{4+5x^2}}\,dx = \left(\frac{x^3}{20} - \frac{3x}{50}\right)R + \frac{6}{25\sqrt{5}}\lg(5x+\sqrt{5}\,R)$$

212) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx = \left(\frac{x^4}{10} - \frac{x^2}{5} + \frac{3}{5}\right)\sqrt{3+2x^2}.$$

Das Integral (207) kann auch mittelst einer Reductionsformel ausgeführt werden.

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\int x^{n-1}\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b}x^{n-1}\sqrt{a+bx^2} - \frac{n-1}{b}\int x^{n-2}\sqrt{a+bx^2}\,dx$$

$$\int x^{n-2}\sqrt{a+bx^2}\,dx = a\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx + b\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx.$$

213) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{nb}x^{n-1}\sqrt{a+bx^2} - \frac{(n-1)a}{nb}\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx$$

214) $$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{3-5x^2}} = -\left(\frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{40} + \frac{9x}{400}\right)\sqrt{3-5x^2} + \frac{27}{400\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x}{\sqrt{15}}.$$

Wenn n eine **gerade** Zahl, so ist:

215) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots + \frac{3}{2}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cdots\frac{3}{2}\arcsin x$$

216) $$\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{16}\arcsin x.$$

Wenn n eine ungerade Zahl, so ist:

217) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \cdots\right)\sqrt{1-x^2}$$

218) $$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\left(\frac{x^6}{7} + \frac{6x^4}{35} + \frac{8x^2}{35} + \frac{16}{35}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

$$S = \int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx.$$

Durch die Substitution $x - \alpha = \frac{1}{z}$ verwandelt sich S in folgendes Integral:

$$S = -\int \frac{1}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)z+(a+2b\alpha+c\alpha^2)z^2}}dz.$$

Je nachdem der Coefficient von z^2 positiv oder negativ ist, ist der Werth dieses Integrales verschieden.

1) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 > 0$ und $= m$ gesetzt:

219) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx =$$
$$= \mp\frac{1}{\sqrt{m}}\lg\frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x \pm \sqrt{m}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x-\alpha}.$$

2) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 < 0$ und $= m$:

220) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-m}}\arcsin\frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x}{(x-\alpha)\sqrt{b^2-ac}}.$$

Ist endlich 3) $a + 2b\alpha + c\alpha^2 = 0$

so ist α eine Wurzel von $a + 2bx + cx^2 = 0$. Nennen wir die

andere Wurzel β, so ist $c(x-\alpha)(x-\beta) = cx^2 + 2bx + a$. Wird endlich $(x-\alpha) = z^2$ gesetzt, so ist $(x-\beta) = (z^2 + \alpha - \beta)$ und

$$S = \frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{1}{z^2 \sqrt{z^2 + \alpha - \beta}}\, dz.$$

Durch die weitere Substitution $z = \frac{1}{u}$ geht S über in:

$$S = -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{u}{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2 + 1}}\, du = -\frac{2}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2+1}}{\alpha-\beta}$$

und daraus durch die umgekehrten Substitutionen:

$$S = -\frac{2}{c} \frac{\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)} = -\frac{2}{c} \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)}.$$

Da ferner $\alpha + \beta = -\frac{2b}{c}$ ist, so kann $\alpha - \beta = 2\frac{b+c\alpha}{c}$ gesetzt werden. So wird schliesslich:

221) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(b+c\alpha)(x-\alpha)}$$

222) $$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \lg \frac{2x+4+\sqrt{6}R}{x-1}$$

223) $$\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x+5}{(x-2)\sqrt{8}}$$

224) $$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Wenn $a > 0$ ist, so ist:

225) $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}.$$

Wenn $a < 0$ ist, so ist:

226) $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{a+bx}{x\sqrt{b^2-ac}}$$

227) $$\int \frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$$

228) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx = \lg \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

229) $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx = \operatorname{arc\,sin}\frac{x-2}{x\sqrt{5}}$$

230) $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{x}.$$

$$S = \int \frac{1}{(x-\alpha)^n\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Durch die Substitution $x-\alpha = \frac{1}{z}$ erhält man:

$$S = -\int \frac{z^{n-1}}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)z+(a+2b\alpha+c\alpha^2)z^2}}\,dz.$$

231) $$\int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}\right)\sqrt{3-2x^2} + 7\lg\frac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1}$$

232) $$\int \frac{1}{(x-2)^4\sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = \left(\frac{1}{9(x-2)^3}+\frac{2}{27(x-2)}\right)R$$

233) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

234) $$\int \frac{1}{x^3\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{-1}{2ax^2}+\frac{3b}{2a^2x}\right)R + \left(\frac{3b^2}{2a^2}-\frac{c}{2a}\right)\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

235) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = -\frac{1}{x}R + 2\lg\frac{1-2x-R}{x}$$

236) $$\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2}\lg\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

237) $$\int \frac{1}{x^4\sqrt{3-2x+x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{9x^3}+\frac{5}{54x^2}+\frac{1}{54x}\right)R - \frac{2}{27\sqrt{3}}\lg\frac{3-x-\sqrt{3}\,R}{x}$$

238) $$\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}\,dx = \int \frac{b+cx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx +$$
$$+ a\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx + b\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$
$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Man zerlegt $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche und damit das ganze Integral in eine Summe integrirbarer Theile.

239) $$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x-7}}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2}\right)\frac{1}{R}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \lg \frac{11x-1-\sqrt{32}\,R}{x-3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{4x+11}{5(x+2)}$$

240) $$\int \frac{4x+17}{x^2+x-6} \cdot \frac{1}{\sqrt{5-2x^2}}\,dx = \frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{5-4x}{(x-2)\sqrt{10}} -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{13}} \arcsin \frac{6x+5}{(x+3)\sqrt{10}}$$

241) $$\int \frac{3x-5}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1} +$$
$$+ \frac{17}{5\sqrt{5}} \lg \frac{x+4-\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}$$

242) $$\int \frac{1}{(x^2-9)\sqrt{5+6x-7x^2}}\,dx = \frac{1}{6\sqrt{40}} \arcsin \frac{7-9x}{(x-3)\sqrt{11}} -$$
$$- \frac{1}{6\sqrt{76}} \arcsin \frac{12x-2}{(x+3)\sqrt{11}}.$$

$$S = \int \frac{1}{(x-p-qi)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Dieses Integral geht hervor aus (219), wenn man $\alpha = p+qi$ setzt. Dann ist auch $m = a+2bp+c(p^2-q^2)+2q(b+cp)i$. Setzen wir $m = \varrho(\cos t + i\sin t)$, oder $\varrho\cos t = a+2bp+c(p^2-q^2)$, $\varrho\sin t = 2q(b+cp)$, so sind ϱ und t bestimmbar. Zugleich ist:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right).$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right)\lg\left[a + bp + (b+cp)x - \sqrt{\varrho}\cos\frac{t}{2}R + \right.$$

$$\left. + \{(b+cx)q - \sqrt{\varrho}\sin\frac{t}{2}R\}i\right] - \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right)\lg(x-p-qi).$$

Wenn nun das vorstehende Integral bei der Zerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche entstanden ist, so muss noch ein zweites existiren, welches sich von diesem nur durch das Vorzeichen von i unterscheidet. In abgekürzter Bezeichnung mögen beide heissen:

$$S = (A + Bi)\lg(P + Qi) - (A + Bi)\lg(x - p - qi)$$
$$S_1 = (A - Bi)\lg(P - Qi) - (A - Bi)\lg(x - p + qi)$$

$$S + S_1 = A\lg(P^2 + Q^2) + 2B\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q} - A\lg[(x-p)^2 + q^2] +$$
$$+ 2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}.$$

Setzt man $x^2 = z$, so ist:

243) $$\int\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}dz =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

244) $$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = \int\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$
$$= -\sqrt{a^2-x^2} + a\,.\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}.$$

Setzt man $x^3 = z^2$, so ist:

245) $$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx = \frac{2}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{a^3-z^2}} = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}.$$

Man setze $x^2 = z$ in:

246) $$\int x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}dx = \int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx + \int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz + \frac{1}{2}\int\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}dz =$$
$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\sqrt{1-x^4} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}x^2$$

247) $\int (x+\sqrt{1+x^2})^n dx = \frac{1}{2}\int (z^n + z^{n-2})\,dz$ für $z = x+\sqrt{1+x^2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{n-1}\right].$$

§ 5. Exponential- und logarithmische Funktionen.

$$\int f(e^x)\,dx.$$

Diese Funktionen werden integrirbar durch die Substitution $z = e^x$.

248) $\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}$

249) $\int (e^{3x} + \sqrt{e^x})\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + 2\sqrt{e^x}$

250) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz = 2\lg(e^x+1) - x$

251) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \operatorname{arc\,tg} e^x$

252) $\int \frac{1}{\sqrt{a+be^x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{a+be^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x} + \sqrt{a}}$; $z = \sqrt{a+be^x}$

253) $\int \frac{1}{e^x}\,dx = -\frac{1}{e^x}$

254) $\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3}$

255) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{e^x-1}$

256) $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x$

257) $\int \frac{e^x}{e^x + a}\,dx = \lg(e^x + a)$

258) $\int \frac{4e^x + 6e^{-x}}{9e^x - 4e^{-x}}\,dx = \frac{35}{36}\lg\left(e^{2x} - \frac{4}{9}\right) - \frac{3x}{2}$

259) $\int \frac{1}{e^x + e^{2x}}\,dx = \lg(1+e^x) - \frac{1}{e^x} - x$

260) $\int \frac{e^x}{(e^x+a)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(e^x+a)^{n-1}}$.

$$\int f(x, e^x)\, dx.$$

Neben der Substitution wird bei diesen Funktionen auch das Integriren nach Theilen oft mit Vortheil angewendet.

261) $\int e^x x^4\, dx = e^x x^4 - 4\int e^x x^3\, dx$

262) $\int e^x x^3\, dx = e^x x^3 - 3\int e^x x^2\, dx$

u. s. w.

263) $\int e^x x^4\, dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$

264) $\int e^x x^n\, dx = e^x (x^n - nx^{n-1} + n[n-1]x^{n-2} + \cdots)$

265) $\int e^{mx} x^n\, dx = \frac{e^{mx} x^n}{m} - \frac{n}{m}\int e^{mx} x^{n-1}\, dx$

266) $\int (a+bx)^n e^{mx}\, dx = \frac{e^{mx}(a+bx)^n}{m} - \frac{nb}{m}\int e^{mx}(a+bx)^{n-1}\, dx$

Diese Reductionsformel ist für positive und negative m gleichmässig anwendbar. Man kann sie auch umkehren und $-p$ für $n-1$ setzen.

267) $\int (a+bx)^{-p} e^{mx}\, dx = -\frac{e^{mx}(a+bx)^{-p+1}}{(p-1)b} + \frac{m}{(p-1)b}\int e^{mx}(a+bx)^{-p+1}\, dx.$

Für $p = 1$ ist diese Formel nicht mehr brauchbar, das Integral muss dann durch Reihenentwickelung weiter geführt werden.

268) $\int \frac{e^x}{x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots\right) dx =$

$$= \lg x + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \cdots$$

269) $\int x^4 e^{2x}\, dx = e^{2x}\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right)$

270) $\int x^3 e^{-x}\, dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$

271) $\int \frac{e^x}{x^4}\, dx = -e^x\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6x}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^x}{x}\, dx$

272) $\int \frac{e^x}{(x-a)^n}\,dx = e^a \int \frac{e^z}{z^n}\,dz$, wenn $z = x - a$.

Exponentialfunktionen mit der Basis a werden in solche mit der Basis e umgewandelt, indem man $a = e^m$ setzt.

273) $\int a^{bx} f(x)\,dx = \int e^{mbx} f(x)\,dx$; $m = \lg a$

274) $\int x^3 a^x\,dx = a^x \left(\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{6x}{m^3} - \frac{6}{m^4}\right)$

275) $\int \frac{a^x}{x^4}\,dx = -a^x \left(\frac{1}{3x^3} + \frac{m}{6x^2} + \frac{m^2}{6x}\right) + \frac{m^3}{6}\int \frac{a^x}{x}\,dx$

276) $\int f(x)\,dx = \int e^z f(e^z)\,dz$, wenn $z = \lg x$ ist.

277) $\int (\lg x)^n\,dx = \int e^z z^n\,dz = e^z (z^n - nz^{n-1} + \ldots.) =$

$= x[(\lg x)^n - n(\lg x)^{n-1} + n(n-1)(\lg x)^{n-2} + \ldots.]$.

Dieses Integral lässt sich auch sehr leicht mittelst der Integration nach Theilen ausführen.

278) $\int (\lg x)^n\,dx = x(\lg x)^n - n\int (\lg x)^{n-1}\,dx$

279) $\int \lg x\,dx = x(\lg x - 1)$

280) $\int (\lg x)^2\,dx = x([\lg x]^2 - 2\lg x + 2)$

281) $\int x^n \lg x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\lg x - \frac{1}{n+1}\right)$

282) $\int x^{-n} \lg x\,dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\left(\lg x + \frac{1}{n-1}\right)$

283) $\int x^3 \lg x\,dx = \frac{x^4}{4}\left(\lg x - \frac{1}{4}\right)$

284) $\int \frac{\lg x}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}\left(\lg x + \frac{1}{3}\right)$

285) $\int \frac{1}{x}\lg x\,dx = \frac{1}{2}(\lg x)^2$

286) $\int (a+bx)^n \lg x\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}\lg x - \frac{1}{(n+1)b}\int \frac{(a+bx)^{n+1}}{x}\,dx$

287) $\int (4+3x)^2 \lg x\,dx = \frac{(4+3x)^3}{9}\lg x - \frac{64}{9}\lg x - 16x - 6x^2 - x^3$

288) $\int \lg(a+bx)\,dx = \frac{a+bx}{b}(\lg[a+bx]-1)$

289) $\int x^n \lg(a+bx^m)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg(a+bx^m) - \frac{mb}{n+1}\int \frac{x^{m+n}}{a+bx^m}\,dx$

290) $\int \lg(a+bx^2)\,dx = x\lg(a+bx^2) - 2x + 2a\int \frac{1}{a+bx^2}\,dx$

291) $\int x\lg(1+x^2)\,dx = \frac{1+x^2}{2}\lg(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$

292) $\int x^3 \lg(x^2+3)\,dx = \frac{x^4}{4}\lg(x^2+3) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 9\lg(x^2+3)\right)$

293) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\lg x\,dx = \sqrt{a^2+x^2}\,.\lg x - \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx =$

$$= (\lg x - 1)\sqrt{a^2+x^2} - a\lg\frac{a-\sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$

§ 6. Trigonometrische und cyklometrische Funktionen.

Die Grundformeln zur Integration dieser Funktionsarten werden durch Umkehrung der entsprechenden Differentialformeln gewonnen.

294) $\int \cos x\,dx = \sin x$

295) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

296) $\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx$

297) $\int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx$

298) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x$

299) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x$

300) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\lg\cos x$

301) $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \lg\sin x$

302) $\int \operatorname{tg} nx\, dx = -\frac{1}{n} \lg \cos nx$

303) $\int \operatorname{cotg} nx\, dx = \frac{1}{n} \lg \sin nx$

304) $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C_1$

$= \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_2.$

Je 2 dieser 3 Werthe differiren nur um eine Constante.

305) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$

306) $\int \cos^2 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x.$

Aus (300) und (301) folgt:

307) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)\, dx = \lg \sin x - \lg \cos x = \lg \operatorname{tg} x,$ oder:

308) $\int \frac{2}{\sin 2x}\, dx = \lg \operatorname{tg} x,$ oder:

309) $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

310) $\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx = -\int \frac{1}{\sin z}\, dz = -\lg \operatorname{tg} \frac{z}{2} =$

$= -\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \lg \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

Höhere Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ können mit Hülfe von Reductionsformeln integrirt werden. Sei:

$$S_n = \int \sin^n x\, dx.$$

$$\int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\, dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n$$

$$n S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2}$$

311) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx.$

Wird die Formel umgekehrt und $n-2$ durch $-p$ ersetzt, so entsteht:

312) $$\int (\sin x)^{-p}\,dx = -\frac{1}{p-1}\cos x\,(\sin x)^{-p+1} + \\ + \frac{p-2}{p-1}\int (\sin x)^{-p+2}\,dx.$$

Die beiden Formeln dienen dazu, den Exponenten von $\sin x$ auf 2 oder auf 1 zu erniedrigen und so das Integral auf eine nach früheren Formeln ausführbare Form zu bringen.

313) $$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\left(\sin^2 x + 2\right)\cos x$$

314) $$\int \sin^4 x\,dx = -\left(\frac{1}{4}\sin^3 x + \frac{3}{8}\sin x\right)\cos x + \frac{3x}{8}$$

315) $$\int \sin^5 x\,dx = -\left(\frac{1}{5}\sin^4 x + \frac{4}{15}\sin^2 x + \frac{8}{15}\right)\cos x$$

316) $$\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

317) $$\int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = -\left(\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3\sin x}\right)\cos x.$$

Die Reductionsformeln für $\cos^n x$ werden auf dieselbe Weise direct gewonnen wie diejenigen für $\sin^n x$; sie können aber auch aus (311) und (312) dadurch abgeleitet werden, dass man $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin z$ setzt.

318) $$\int \cos^n x\,dx = \int \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = -\int \sin^n z\,dz.$$

Wird das Integral entwickelt und darin wieder $\sin z$ durch $\cos x$ und $\cos z$ durch $\sin x$ ersetzt, so erhält man:

319) $$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

320) $$\int (\cos x)^{-p}\,dx = \frac{1}{p-1}\sin x(\cos x)^{-p+1} + \frac{p-2}{p-1}\int (\cos x)^{-p+2}\,dx$$

321) $$\int \cos^4 x\,dx = \left(\frac{1}{4}\cos^3 x + \frac{3}{8}\cos x\right)\sin x + \frac{3}{8}x$$

322) $$\int \cos^5 x\,dx = \left(\frac{1}{5}\cos^4 x + \frac{4}{15}\cos^2 x + \frac{8}{15}\right)\sin x$$

323) $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

324) $\int \frac{1}{\cos^5 x}\,dx = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

Mit Hülfe der beiden Formeln:

$$\sin nx = \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i}, \quad \cos nx = \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2}$$

lassen sich $\sin^n x$ und $\cos^n x$ in Funktionen der vielfachen Bögen umwandlen, und wir wollen an einem Beispiel zeigen, wie dies geschieht.

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32\,i}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} - 5\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + 10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{16}[\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x].$$

325) $\int \sin^5 x\,dx = \frac{1}{16}\left[-\frac{\cos 5x}{5} + \frac{5\cos 3x}{3} - 10\cos x\right]$

326) $\int \cos^6 x\,dx = \frac{\sin 6x}{192} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{5x}{16}$

327) $\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{32}\left[\frac{\sin 6x}{6} - \frac{3\sin 4x}{2} + \frac{15\sin 2x}{2}\right] + \frac{5x}{16}$

328) $\int \cos^7 x\,dx = \frac{1}{64}\left[\frac{\sin 7x}{7} + \frac{7\sin 5x}{5} + 7\sin 3x + 35\sin x\right]$

329) $\int \cos^8 x\,dx = \frac{1}{128}\left[\frac{\sin 8x}{8} + \frac{4\sin 6x}{3} + 7\sin 4x + \right.$

$$\left. + 28\sin 2x\right] + \frac{35x}{128}.$$

Wird $\sin x = y$ gesetzt, bez. $\cos x = y$, so erhält man leicht:

$$\int \sin^n x\,dx = \int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\,dy; \quad \int \cos^n x\,dx = -\int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

330) $\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int (1-y^2)\,dy =$

$$= -\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

331) $$\int \cos^5 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1-y^2)^2\, dy =$$
$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x$$

332) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x} = \int -\frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{1-y}{1+y} =$$
$$= \frac{1}{2} \lg \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

333) $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\left[\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{4}{15\sin^3 x} + \frac{8}{15\sin x}\right] \cos x$$

334) $$\int \frac{dx}{\sin^7 x} = -\left[\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{5}{24\sin^4 x} + \frac{5}{16\sin^2 x}\right] \cos x + \frac{5}{16} \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

335) $$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4\sin x}{15\cos^3 x} + \frac{8}{15} \operatorname{tg} x.$$

Setzt man $\sin x = \frac{1}{y}$, oder $\cos x = \frac{1}{y}$, so wird man finden:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\int \frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2-1}}\, dy; \quad \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2-1}}\, dy.$$

336) $$\int \frac{dx}{\cos^7 x} = \left[\frac{1}{6\cos^6 x} + \frac{5}{24\cos^4 x} + \frac{5}{16\cos^2 x}\right] \sin x + \frac{5}{16} \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

337) $$\int \frac{dx}{\cos^8 x} = \left[\frac{1}{7\cos^7 x} + \frac{6}{35\cos^5 x} + \frac{8}{35\cos^3 x} + \frac{16}{35\cos x}\right] \sin x$$

338) $$\int \sin^n x \cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$$

339) $$\int \cos^n x \sin x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

Gewöhnlich wird dieses Integral durch Integration nach Theilen auf ein einfacheres Integral derselben Art reducirt:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx$$

$\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x = \sin^{m-2} x \cos^n x\,(1-\sin^2 x) = \sin^{m-2} x \cos^n x -$ $- \sin^m x \cos^n x$. Wird hiernach das letzte Integral zerlegt und dann reducirt, so erhält man:

340) $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx.$$

Setzt man $m = p + 2$, so wird:

$$\int \sin^{p+2} x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{p+1} x \cos^{n+1} x}{p+n+2} + \frac{p+1}{p+n+2}\int \sin^p x \cos^n x\, dx.$$

341) $$\int \sin^p x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{n+1} x}{p+1} + \frac{p+n+2}{p+1}\int \sin^{p+2} x \cos^n x\, dx.$$

Während (340) dazu dient, ein positives m zu verkleinern, wird durch (341) ein negatives p vergrössert; in beiden Fällen bleibt n ungeändert. Wird wieder $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ statt x, $-dx$ statt dx gesetzt, so entstehen aus den beiden letzten Formeln die folgenden:

342) $$\int \cos^m x \sin^n x\, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{n+m}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\, dx$$

343) $$\int \sin^n x \cos^p x\, dx = -\frac{\sin^{n+1} x \cos^{p+1} x}{p+1} + \frac{p+n+2}{p+1}\int \sin^n x \cos^{p+2} x\, dx$$

344) $$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \left[\frac{\sin^5 x}{6} - \frac{\sin^3 x}{24} - \frac{\sin x}{16}\right]\cos x + \frac{x}{16}$$

345) $$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \left[\sin^6 x - \frac{\sin^4 x}{5} - \frac{4\sin^2 x}{15} - \frac{8}{15}\right]\frac{\cos x}{7}.$$

Aufgaben dieser Art können auch so behandelt werden:

346) $$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)\, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{4} - \frac{\sin x}{8}\right]\cos x + \frac{x}{8}$$

347) $$\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}$$

348) $\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx = \frac{\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^7 x}{7}$

349) $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}.$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx, \qquad \int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx.$$

Wird im ersten Integral $\sin x = y$, im zweiten $\cos x = y$ gesetzt, so wandeln sich dieselben um in:

$$-\int \frac{y^n}{y^2 - 1} dy \quad \text{und} \quad \int \frac{y^n}{y^2 - 1} dy.$$

Die Division wird ausgeführt, der Quotient integrirt, in dem Restbruch aber vor der Integration die umgekehrte Substitution vollzogen, weil so ein leicht ausführbares Integral entsteht.

350) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^2 x}{2} - \lg \cos x$

351) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

352) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

353) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx = \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^2 x}{2} + \lg \sin x$

354) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}$

355) $\int \frac{\cos x}{\sin^n x} dx = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}.$

Statt mittelst der Formeln (341) und (343) negative Exponenten zu reduciren, können derartige Aufgaben auch so behandelt werden:

356) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)^2 dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x$

357) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1 + \sin^2 x}{\sin x}$

358) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^5 x} dx = \left[\cos^4 x - \frac{25 \cos^2 x}{8} + \frac{15}{8}\right] \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{15}{8} \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

359) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,dx = \left[-\sin^3 x + \frac{3\sin x}{2}\right]\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

360) $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\,dx = \left[-\frac{\sin^6 x}{3} - 2\sin^4 x + 8\sin^2 x - \frac{16}{3}\right]\frac{1}{\cos^8 x}$

361) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \lg \operatorname{tg} x$

362) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 \operatorname{cotg} 2x$

363) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \lg \operatorname{tg} x$

364) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{1}{3\sin x \cos^3 x} - \frac{8}{3}\operatorname{cotg} 2x.$

Durch theilweise Integration erhält man:

365) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \sin^n x \cos^{-n} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$

366) $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,dx$

367) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \lg \cos x$

368) $\int \operatorname{tg}^8 x\,dx = \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

369) $\int \operatorname{cotg}^6 x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x - x$

370) $\int \operatorname{cotg}^7 x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^6 x}{6} + \frac{\operatorname{cotg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - \lg \sin x.$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Wird je eines der beiden Integrale eliminirt, so erhält man:

371) $\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]$

372) $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx].$

Setzt man in beiden Formeln $-x$ statt x, so gehen daraus die folgenden hervor:

373) $\int e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}[a \sin bx + b \cos bx]$

374) $\int e^{-ax} \cos bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}[a \cos bx - b \sin bx]$

375) $\int e^{ax} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int e^{ax} \sin (m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int e^{ax} \sin (m-n)x\, dx$

376) $\int e^{ax} \sin^4 bx\, dx = \frac{1}{8}\int e^{ax} (\cos 4bx - 4 \cos 2bx + 3)\, dx$

377) $\int e^{ax} \cos^3 bx\, dx = \frac{1}{4}\int e^{ax} (\cos 3bx + 3 \cos bx)\, dx$

378) $\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx$

379) $\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx$

380) $\int \frac{\sin x}{x^n}\, dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}}\, dx$

381) $\int \frac{\cos x}{x^n}\, dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}}\, dx.$

Wird $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ gesetzt, so ist $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ und

382) $\int \frac{dx}{a+\cos x} = \frac{2}{a-1}\int \frac{dy}{y^2 + \frac{a+1}{a-1}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\, y\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \quad \text{wenn } \frac{a+1}{a-1} > 0,$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}} \lg \frac{y - \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}{y + \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}, \quad \text{wenn } \frac{a+1}{a-1} < 0.$$

Für $a = 1$ ist

383) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

Ebenso findet man für $\sin x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$, dass $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ und

384) $$\int \frac{dx}{a+\sin x} = \frac{2}{a+1}\int \frac{dy}{y^2+\frac{a-1}{a+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\, y\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}, \quad \text{wenn } \frac{a-1}{a+1} > 0,$$

$$= \frac{+1}{\sqrt{1-a^2}} \lg \frac{y-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{y+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}, \quad \text{wenn } \frac{a-1}{a+1} < 0.$$

Für $a = 1$ wird

385) $$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

386) $$\int \frac{\cos x}{a+\cos x}\,dx = \int\left(1-\frac{a}{a+\cos x}\right)dx = x - a\int \frac{dx}{a+\cos x}$$

387) $$\int \frac{\sin x}{a+\sin x}\,dx = x - a\int \frac{dx}{a+\sin x}$$

388) $$\int \frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x} = S$$

$$S = m\int \frac{dx}{ma+mb\sin x+mc\cos x} = m\int \frac{dx}{ma+\sin\lambda\sin x+\cos\lambda\cos x},$$

wenn $mb = \sin\lambda$, $mc = \cos\lambda$, oder $m = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}$ gesetzt wird.

Weiter ist $\lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c}$ und

$$S = m\int \frac{dx}{am+\cos(x-\lambda)}.$$

Hiermit ist das gegebene Integral auf (382) zurückgeführt.

389) $$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lg \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right);\ m = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \lambda = \frac{\pi}{4}.$$

Ist $ma - 1 = 0$, oder $a = \sqrt{b^2+c^2}$, so ist:

390) $$\int \frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x} = \frac{1}{a}\cdot\frac{c\sin x - b\cos x}{a+b\sin x+c\cos x}.$$

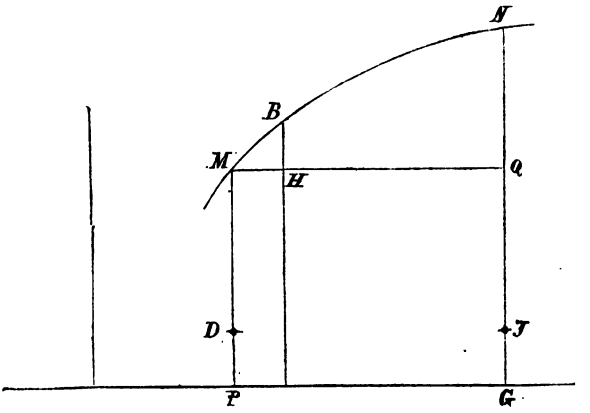
Bestimmte Integrale.

Zu dem unbestimmten Integral

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

kann man, wie zu jeder anderen Funktion, die Funktionscurve construiren. Nehmen wir zuerst an, das unbestimmte Integral sei ausführbar, $F(x)$ also bekannt. Wählt man in Fig. 9 $AP = a$ und macht $MD = F(a)$, $DP = C =$ der Constanten, also beliebig gross, so erhält man Punkt M. Ebenso wird Punkt N gefunden, wenn $AG = b$, $NJ = F(b)$, $JG = DP = C$ gemacht wird. In gleicher Weise werden die Constructionselemente aller übrigen Punkte bestimmt. Aus dieser Construction wird zunächst klar, dass die Wahl der beliebigen Constanten auf den Lauf der Funktionscurve nicht influirt, indem eine Aenderung der Werthe $C = DP = JG$ nichts weiter zur Folge hat, als eine parallele Verschiebung der x-Achse. Unter der Voraussetzung, dass $F(x)$ zwischen den Grenzen $F(a)$ bis $F(b)$ einwerthig, stetig und endlich bleibt, lassen wir die Variabele x die Werthe

Fig. 9.



von $x = a$ bis $x = b$ continuirlich durchlaufen und erhalten so den Bogen MN. Die Aenderung, welche y während dieses Laufes erleidet, wird hier durch NQ bezeichnet, und es ist:

$$NQ = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

An dem noch nicht ausgeführten Integral bezeichnen wir diesen Funktionsunterschied so:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (11)$$

und nennen die linke Seite dieser Gleichung ein bestimmtes Integral, b die obere, a die untere Grenze desselben.

Ist also das unbestimmte Integral ausfindig gemacht:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

und zeigt sich, dass dasselbe von $x = a$ bis $x = b$ eine einwerthige, endliche und stetige Funktion von x ist, so gilt zur Herstellung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

die folgende Regel:

Man subtrahire den Werth des unbestimmten Integrals an der unteren Grenze ($x = a$) von dem andern Werthe, den dasselbe unbestimmte Integral an der oberen Grenze ($x = b$) annimmt.

Ist m ein Werth zwischen a und b, so haben wir:

$$\int_a^m f(x)\,dx = F(m) - F(a),$$

$$\int_m^b f(x)\,dx = F(b) - F(m);$$

folglich ergibt sich durch Addition:

$$\int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Andererseits ist aber

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

und durch Vergleichung der Resultate findet man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx. \qquad (12)$$

Wir wollen nun die Voraussetzung über die Funktion $F(x)$ erweitern. Es soll diese Funktion einen einwerthigen, end-

lichen und stetigen Verlauf haben von $x = a$ bis $x = m - \delta$, selbst dann noch, wenn man die positive Grösse δ unmessbar klein werden lässt. Ferner soll die Funktion $F(x)$ einwerthig, endlich und stetig sein von $x = m + \varepsilon$ bis $x = b$, selbst dann noch, wenn die positive Grösse ε unmessbar klein genommen wird. Aber an der Stelle $x = m$ sollen die beiden endlichen Funktionswerthe $F(m - 0)$ und $F(m + 0)$ um eine endliche Differenz von einander verschieden sein. Hier ist mit $m - 0 = \lim(m - \delta)$ der grösste Werth bezeichnet, den x erreicht, wenn es stetig wachsend das Intervall von a bis m durchläuft. Und ebenso ist $m + 0 = \lim(m + \varepsilon)$ der kleinste Werth der Variabelen x für das Intervall von m bis b. In dem hier betrachteten Falle besteht die Funktionscurve aus zwei einzelnen Zügen, von denen jeder für sich einen ununterbrochenen Verlauf hat. Der Uebergang von dem einen Zuge zum andern an der Stelle $x = m$ geschieht sprungweise, indem der Endpunkt des ersten Zuges und der Anfangspunkt des zweiten zwar beide im endlichen Gebiete der Ebene, aber getrennt von einander liegen.

Man kann nun die Gleichung (11) als Definition des bestimmten Integrals so auffassen:

Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ist die Summe aller stetigen Aenderungen, welche das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

von $x = a$ bis $x = b$ erleidet.

Wir wollen verabreden, dass diese Definition allgemeine Gültigkeit haben soll. Besitzt also die Funktion $F(x)$ zwischen a und b an der Stelle $x = m$ die eben besprochene Unterbrechung der Stetigkeit, so haben wir:

$$\int_a^m f(x)\,dx = \int_a^{m-0} f(x)\,dx = F(m - 0) - F(a),$$

$$\int_m^b f(x)\,dx = \int_{m+0}^b f(x)\,dx = F(b) - F(m+0).$$

Aus diesen beiden bestimmten Integralen setzt sich durch Addition die Summe aller stetigen Aenderungen der Funktion $F(x) + C$ von $x = a$ bis $x = b$ zusammen. Es ist also:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{m-0} f(x)\,dx + \int_{m+0}^b f(x)\,dx \qquad (13)\\ &= \{F(m-0) - F(a)\} + \{F(b) - F(m+0)\}\\ &= F(b) - F(a) - \{F(m+0) - F(m-0)\}.\end{aligned}$$

Man sieht leicht, wie sich diese Formel für den Fall erweitern lässt, dass die Funktion $F(x) + C$ zwischen $x = a$ und $x = b$ zwar überall endlich ist, aber an einer endlichen Anzahl von Stellen sprungweise sich ändert und von jeder Sprungstelle bis zur nächsten einwerthig und stetig verläuft. Es zerfällt dann das bestimmte Integral in eine endliche Anzahl von Summanden, von denen jeder ein bestimmtes Integral ist und nach der ursprünglichen Regel berechnet wird. Wir dürfen also zu der ersten Voraussetzung zurückkehren, dass zwischen den Integrationsgrenzen das unbestimmte Integral einwerthig, endlich und stetig verlaufe.

Es handelt sich jetzt um Ermittlung des bestimmten Integrals, wenn das unbestimmte Integral nicht bekannt ist, d. h. wenn $F(x)$ eine Funktion von x ist, deren analytischen Ausdruck wir nicht angeben können. Wir setzen voraus, dass $f(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen einwerthig, endlich und stetig sei. Dann gilt dasselbe von der unbekannten Funktion $F(x)$.

Es sei nun $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < b$. Wir setzen die identische Gleichung an:

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) = {} & F(x_1) && - F(a)\\ & + F(x_2) && - F(x_1)\\ & + \ldots\ldots\ldots\\ & + F(x_{k+1}) && - F(x_k)\\ & + \ldots\ldots\ldots\\ & + F(b) && - F(x_{m-1}).\end{aligned} \qquad (A)$$

Auf der rechten Seite dürfen die einzelnen Differenzen nach Taylor's Lehrsatze ausgedrückt werden, wenn man in der allgemeinen Formel [Diff. R. Gleichung (30)] speciell $n = 1$ nimmt. Also: $F(x_{k+1}) - F(x_k) = (x_{k+1} - x_k) F'(\xi_k)$,

wobei zur Abkürzung $x_k + \Theta_k (x_{k+1} - x_k) = \xi_k$ gesetzt und unter Θ_k ein unbekannter positiver echter Bruch verstanden wird. Da $F'(x) = f(x)$ ist, so kann man statt der letzten Gleichung auch schreiben:

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)\{f(\xi_k) - f(x_k)\}. \quad \text{(B)}$$

Man nehme jetzt den Index k der Reihe nach gleich 0, 1, 2, 3, ... bis $m - 1$ und bezeichne mit S die kleinste, mit T die grösste der Differenzen

$$f(\xi_0) - f(a), \quad f(\xi_1) - f(x_1), \ldots \quad f(\xi_{m-1}) - f(x_{m-1}).$$

Dann lässt sich statt der Gleichung (B) eine doppelte Umgleichung ansetzen, nämlich:

$$\begin{aligned} (x_{k+1} - x_k)\{f(x_k) + T\} &> F(x_{k+1}) - F(x_k) \\ F(x_{k+1}) - F(x_k) &> (x_{k+1} - x_k)\{f(x_k) + S\}. \end{aligned} \quad \text{(C)}$$

Führt man dies in die Gleichung (A) ein, so ergibt sich:

$$F(b) - F(a) = (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{m-1}) f(x_{m-1}) + R, \quad \text{(D)}$$

und es gilt für R die doppelte Umgleichung:

$$(b - a)\, T > R > (b - a)\, S. \quad \text{(E)}$$

So lange m endlich genommen wird, sind S und T freilich unbekannt, aber jedenfalls endlich. Lassen wir aber m ins Unendliche wachsen, und zwar so, dass alle Differenzen von der Form $x_{k+1} - x_k$ in Differentiale übergehen, so müssen wegen der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ alle Differenzen von der Form $f(\xi_k) - f(x_k)$ zu Null werden, und desshalb ist:

$$\lim S = 0, \quad \lim T = 0, \quad \lim R = 0.$$

Die Gleichung (D) vereinfacht sich dadurch, und man erhält mit Rücksicht auf (11):

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (14)$$
$$= \lim\{(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(b-x_{m-1})f(x_{m-1})\}$$
für $m=\infty$.

In dieser Gleichung spricht sich die Definition des bestimmten Integrals aus, wenn das unbestimmte Integral sich nicht ermitteln lässt. Das Resultat ist davon unabhängig, nach welchem Gesetz die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ zwischen a und b eingeschaltet werden. Am einfachsten lässt man sie mit gleichen Differenzen fortschreiten. Wird dann noch $b-a=m\delta$ gesetzt, so geht die Gleichung (13) in folgende über:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\{\delta[f(a)+f(a+\delta)+\cdots+f(a+\overline{m-1}\,\delta)]\}$$
für $\delta=0$ und $m=\infty$. (15)

Die Formel (14) lässt auch eine geometrische Interpretation zu. In Fig. 9 ist, wie schon oben bemerkt:

$$NQ = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Theilen wir nun die Strecke der Abscissenaxe von P bis G in m Theile und bezeichnen die einzelnen Theilpunkte mit $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{m-1}$. In jedem Theilpunkte errichten wir die Ordinate und ziehen durch deren Endpunkt eine Parallele zur Abscissenaxe bis zur nächstfolgenden Ordinate. Dann ersieht man aus der Figur, dass NQ die Summe sämmtlicher Differenzen von je zwei benachbarten Ordinaten ist. Dasselbe spricht sich in der Gleichung (A) aus. Zieht man jetzt noch die Sehnen, welche die Endpunkte von je zwei benachbarten Ordinaten verbinden und bezeichnet die Winkel, welche sie mit der positiven Abscissenaxe einschliessen, mit $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m-1}$, so ergibt sich:

$$NQ = (x_1-a)\operatorname{tg}\beta_0+(x_2-x_1)\operatorname{tg}\beta_1+(x_3-x_2)\operatorname{tg}\beta_2+\ldots$$
$$+(b-x_{m-1})\operatorname{tg}\beta_{m-1}.$$

Es sollen ferner in den Endpunkten der Ordinaten die Tangenten gelegt und ihre Winkel mit der Abscissenaxe mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ bezeichnet werden. Es sei S die kleinste, T die grösste

der Differenzen $\operatorname{tg}\beta_0 - \operatorname{tg}\alpha_0$, $\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\alpha_2$, ... $\operatorname{tg}\beta_{m-1} - \operatorname{tg}\alpha_{m-1}$. Dann haben wir:

$$NQ = (x_1 - a)\operatorname{tg}\alpha_0 + (x_2 - x_1)\operatorname{tg}\alpha_1 + (x_3 - x_2)\operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + (b - x_{m-1})\operatorname{tg}\alpha_{m-1} + R \quad (F)$$

und $$(b - a)\,T > R > (b - a)\,S.$$

Die Gleichung (F) stimmt ihrem Inhalt nach mit (D) überein. Es bedarf also jetzt nur noch des Ueberganges zur Grenze für $m = \infty$.

Wenn die Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ zwar überall endlich ist, aber an einer endlichen Anzahl von Stellen eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und von jeder Sprungstelle bis zur nächsten einwerthig und stetig verläuft, so kann man das bestimmte Integral nach Anleitung der Formel (13) in eine Summe von einzelnen Integralen zerlegen, so dass innerhalb der Grenzen jedes einzelnen Integrals die Funktion $f(x)$ stetig bleibt. Jedes dieser einzelnen Integrale kann dann nach Vorschrift der Gleichung (14) oder (15) behandelt werden.

Statt der Gleichung (15) darf man auch schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\{\delta[f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+m\delta)]\}$$
für $\delta = 0$ und $m = \infty$. (16)

Denn die rechten Seiten von (15) und (16) haben die Differenz $\lim \delta\{f(b) - f(a)\}$, d. h. Null. Hiernach können wir ansetzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\{\delta[f(a) + f(a+\delta) + \ldots + f(a+\overline{m-1}\,\delta)]\}$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim\{-\delta[f(a+\overline{m-1}\,\delta) + f(a+\overline{m-2}\,\delta) + \ldots + f(a)]\}.$$

Hieraus findet sich durch Addition:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0$$

oder, was dasselbe bedeutet:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \quad (17)$$

Der Werth eines bestimmten Integrals geht also in das Entgegengesetzte über, wenn man die Grenzen vertauscht.

Es sei $b > c > a$ und $f(c) = \infty$, wogegen $f(c - \delta)$ und $f(c + \varepsilon)$ noch endlich sind. Wir bilden die bestimmten Integrale

$$\int_a^{c-k_1\delta} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{c+k_2\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

und fragen nach ihren Grenzwerthen für $\delta = 0$ und $\varepsilon = 0$. Sind diese Grenzwerthe bestimmte endliche Grössen, ganz unabhängig von den willkürlichen positiven Zahlen k_1 und k_2, so sagen wir: Unter dem bestimmten Integral von a bis b soll die Summe jener Grenzwerthe verstanden werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^{c-k_1\delta} f(x)\,dx + \lim \int_{c+k_2\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \quad (18)$$

(Aufgaben 405, 406, 408, 410, 411.)

Schliesslich ist noch der Fall zu behandeln, dass eine der Grenzen des Integrals oder beide unendlich gross sind. In diesem Falle setzen wir das Integral an

$$\int_a^{k\omega} f(x)\,dx$$

und fragen, welchem Grenzwerthe sich dasselbe für $\omega = \infty$ annähert. Ist dieser Grenzwerth eine bestimmte endliche Grösse, unabhängig von der willkürlichen positiven Zahl k, so sagen wir: Unter dem bestimmten Integral von a bis ∞ soll jener Grenzwerth verstanden werden:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim \int_a^{k\omega} f(x)\,dx \quad \text{für } \omega = \infty. \quad (19)$$

Ebenso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim \int_0^{k_1\omega} f(x)\,dx - \lim \int_0^{-k_2\omega} f(x)\,dx$$

$$\text{für } \omega = \infty. \quad (20)$$

(Aufgaben 399 und 415.)

Sind in einer der Formeln (18), (19), (20) die Grenzwerthe unbestimmt oder unendlich gross, so kann in einem solchen Falle von einem bestimmten Integral nicht die Rede sein.

391) $\int_a^b m x^n \, dx = \frac{m}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$

392) $\int_{-2}^{+2} x^4 \, dx = \frac{64}{5}$

393) $\int_a^b (a + bx) \, dx = \frac{2ab + b^3 - 2a^2 - a^2 b}{2}$

394) $\int_0^3 (2x + 3x^2) \, dx = 36$

395) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(1 + \frac{3x}{2} - x^2\right) dx = \frac{13}{48}$

396) $\int_0^{3a} \frac{x^2 - 3ax}{x - 4a} \, dx = a^2 \left(\frac{15}{2} - 8 \lg 2\right)$

397) $\int_3^5 \frac{x}{x^2 - 4} \, dx = \frac{1}{2} \lg \frac{21}{5}$

398) $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$

399) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$

400) $\int_2^7 \frac{x}{x^2 + 2x - 3} \, dx = \frac{1}{4} \lg 6 + \frac{3}{4} \lg 2$

401) $\int_0^a dx \sqrt{x} = \frac{2}{3} \sqrt{a^3}$

402) $\int_2^7 dx \sqrt{x + 2} = \frac{38}{3}$

403) $\int_0^a dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2 \pi}{4}$

404) $\int_0^a 3x \sqrt{x^2 + 4a^2} \, dx = a^3 (5\sqrt{5} - 8)$

405) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$

406) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = 1$

407) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2 + 4x}} \, dx = \frac{3}{2} \sqrt{2}$

408) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax - x^2}} \, dx = \frac{3a^2 \pi}{8}$

409) $\int_0^{2b} dx \sqrt{2bx - x^2} = \frac{b^2\pi}{2}$

410) $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{3.5.7....(2n-1)}{2.4.....2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

411) $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{2.4.6.....2n}{3.5.7....(2n+1)}$

412) $\int_0^1 e^x\, dx = e - 1$

413) $\int_0^1 x e^x\, dx = 1$

414) $\int_0^2 e^{ax}\, dx = \frac{e^{2a}-1}{a}$

415) $\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$

416) $\int_{-1}^{+1} a^x\, dx = \frac{a^2-1}{a \lg a}$

417) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lg 2$

418) $\int_1^e x^2 \lg x\, dx = \frac{1+2e^3}{9}$

419) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$

420) $\int_0^\pi 2a \sin\frac{x}{2}\, dx = 4a$

421) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)\, dx = 0{,}6848\ldots = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

422) $\int_0^\pi \sin mx\, dx = \frac{1-\cos m\pi}{m}$

423) $\int_0^\pi \cos mx\, dx = \frac{\sin m\pi}{m}$

424) $\int_0^\pi \sin 2ax\, dx = 0$, wenn a ganzzahlig ist.

425) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx = \frac{\pi}{4}$

426) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1.3....(2n-1)}{2.4.....2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

427) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2.4.....2n}{3.5....(2n+1)}$

428) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos^6 x)\, dx = \frac{\pi}{32}$

429) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}$

430) $\int_0^1 (1 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{3\pi}{32}$.

Man setzt $x = \sin^3 \varphi$, und $\varphi = 0$ für $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für $x = 1$ als Grenze.

431) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x\, dx = \frac{3e^{\pi} - 1}{8}$

432) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = \frac{4}{3}$

433) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{2} \lg 2$

434) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1.$

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

§ 1. Tangente und Normale ebener Curven.

Wird an die Curve $y = f(x)$ durch den Punkt (x, y) eine Tangente gelegt, so ist deren Richtungscoefficient $= \frac{dy}{dx}$, und ihre Gleichung:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \qquad (1)$$

wenn X, Y die variabelen Coordinaten eines auf der Tangente beweglichen Punktes und x, y die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten. Erscheint die Curvengleichung in der Form: $f(x, y) = 0$, so muss für $\frac{dy}{dx}$ der Werth $-\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ substituirt werden; man erhält dann als Gleichung der Tangente:

$$(Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

Diese Form der Gleichung der Tangente kann sehr leicht aus der homogenen Form der Curvengleichung abgeleitet werden. Bezeichnen wir durch $f(x, y, z) = 0$ eine homogene Funktion vom n^{ten} Grad, so ist nach Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z) = 0. \qquad (3)$$

Wird in (2) für $-\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ der Werth $z\frac{\partial f}{\partial z}$ substituirt, so entsteht:

$$\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}z=0. \qquad (4)$$

Um (2) aus der gegebenen Curvengleichung zu gewinnen, macht man dieselbe homogen, bestimmt die D.-Q. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ und setzt dieselben in (4) ein. Wird dann $z=1$ gesetzt, so geht (4) über in (2).

Beispiel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ist die gewöhnliche, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$ die homogene Form der Ellipsengleichung, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=-2z$. Homogene Form der Tangentengleichung: $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-z^2=0$. $z=1$ gibt $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0$ als gewöhnliche Form der Gleichung der Tangente.

Wird der Lauf einer Curve durch die beiden Gleichungen bestimmt: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, so ist $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, und die Gleichung der Tangente:

$$(Y-y)\frac{dx}{dt}-(X-x)\frac{dy}{dt}=0. \qquad (5)$$

Ist endlich $r=f(t)$ die Gleichung einer Curve auf Polarcoordinaten bezogen, so ist: $x=r\cos t$; $y=r\sin t$; $\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos t-r\sin t$; $\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin t+r\cos t$.

Die Normale. Unter der Normale verstehen wir die gerade Linie, welche senkrecht zur Tangente durch deren Berührungspunkt gelegt ist. Ihr Richtungscoefficient ist daher $=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Den verschiedenen Formen der Curvengleichung entsprechen die nachfolgenden Formen der Normalengleichung:

$$y = f(x) \qquad (Y-y)\frac{dy}{dx} + (X-x) = 0 \qquad (6)$$

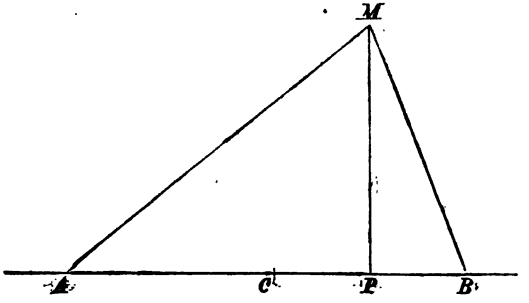
$$f(x, y) = 0 \qquad (Y-y)\frac{\partial f}{\partial x} - (X-x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \qquad (Y-y)\frac{dy}{dt} + (X-x)\frac{dx}{dt} = 0. \qquad (8)$$

Für die nachfolgenden Curven soll die Gleichung der Tangente aufgestellt werden:

1) Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; Tg: $\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} - 1 = 0.$
2) Parabel: $y^2 - 2px = 0$; Tg: $yY - p(X + x) = 0.$
3) Neil'sche Parabel: $x^3 - py^2 = 0$;
   Tg: $3x^2X - 2pyY - py^2 = 0.$
4) Cissoide: $y^2(2r - x) - x^3 = 0$;
   Tg: $2y(x - 2r)Y + (3x^2 + y^2)X - 2ry^2 = 0.$
5) Descartes'sches Blatt: $x^3 - 3axy + y^3 = 0$;
   Tg: $(x^2 - ay)X + (y^2 - ax)Y - axy = 0.$
6) Die Lemniskate erhält man in folgender Weise: Zwei Punkte A und B sind durch ihre Entfernung $AB = 2e$

Fig. 10.



gegeben; man soll den geometrischen Ort aller Punkte M finden; so gelegen, dass das Produkt der beiden Leitstrahlen MA und MB constant ist. Für $MA = r$, $MB = r_1$ muss $r \times r_1 = a^2$ sein. $CA = CB = e$; $CP = x$, $MP = y$; $[y^2 + (e + x)^2][y^2 + (e - x)^2] = a^4$; $(y^2 + x^2)^2 =$

$= 2e^2(x^2 - y^2) + a^4 - e^4$. Dem besonderen Fall $a = e$ entspricht die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Durch die Substitution: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ erhält man als Polargleichung: $r = a\sqrt{2\cos 2t} = b\sqrt{\cos 2t}$.

Wird in einem Kreis senkrecht zu einem Durchmesser eine Sehne $= 2a$ gezogen, so zerlegt dieselbe den Durchmesser in 2 Theile, deren Produkt $= a^2$ ist, und die deshalb als Leitstrahlen zur Construction eines Curvenpunktes benutzt werden können.

Als Gleichung der Tangente findet man:

$$(x^2 + y^2 - a^2)xX + (x^2 + y^2 + a^2)yY + a^2(y^2 - x^2) = 0.$$

7) Logarithmische Linie: $y = a^x$; Tangente: $Y - y = (X - x)\,a^x \lg a$.

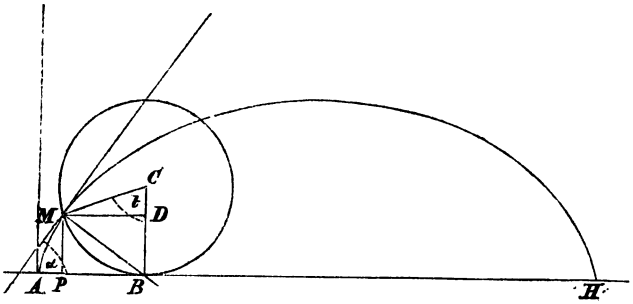
8) Kettenlinie: $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$; Tangente: $Y - y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)(X - x)$.

Da $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$ ist, so findet man den Richtungswinkel α einer Tangente, indem man aus der Ordinate des Berührungspunktes als Hypotenuse und m als Kathete ein rechtwinkeliges Dreieck construirt.

9) Die Cycloide. Wenn ein Kreis (Fig. 11) eine gerade Linie AB in Punkt A berührt und dann auf der Geraden hinrollt, so beschreibt der anfängliche Berührungspunkt A eine Cycloide. Jeder vollständigen Umdrehung entspricht ein Curvenzweig. Es sei $AP = x$, $MP = y$, $MC = a$. Ist arc t mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, so ist arc $MB = at$. Da $AB =$ arc MB sein muss, so ist $x = AP = AB - MD = a(t - \sin t)$; $y = MP = CB - CD = a(1 - \cos t)$. Beide Gleichungen bestimmen zu-

sammen den Lauf der Cycloide. Wird t eliminirt, so erhält man: $x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$.

Fig. 11.



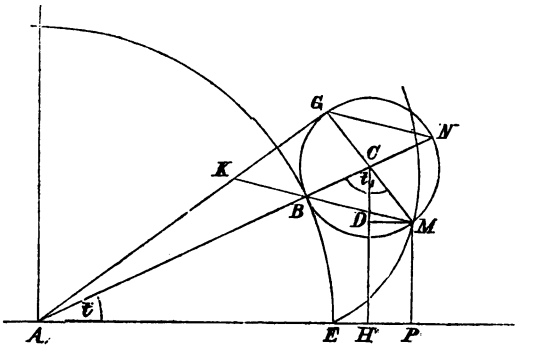
Gleichung der Tangente: $Y - y = (X - x) \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$

„ „ Normale: $Y - y = -(X - x) \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

Um zu beweisen, dass die Normale in M durch den Berührungspunkt B des Erzeugungskreises geht, zeigen wir, dass $X = at$, $Y = 0$, als Coordinaten von B, in Verbindung mit $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, als Coordinaten von M, der Gleichung der Normale genügen.

10) Die Epicycloide. Rollt der Kreis, dessen Mittelpunkt C ist (Fig. 12), mit seiner convexen Seite auf der convexen

Fig. 12.



Seite des festen Kreises mit dem Mittelpunkt A hin, so beschreibt Punkt M während einer Umwälzung den ersten Zweig einer Epicycloide. Der rollende Kreis und der Bahnkreis berühren sich von aussen.

Es sei: $AB = r$, $CB = a$, $AP = x$, $MP = y$, t und t_1 zwei Kreisbögen mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben. Weiter ist: arc $BE = rt$, arc $BM = at_1$, arc BE = arc BM, oder $rt = at_1$, d. h. $t_1 = \frac{rt}{a}$; $x = AH + DM$; $AH = (a+r)\cos t$; $DM = a\sin\left(t + t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -a\cos(t+t_1) = -a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$; $y = CH - CD$; $CH = (a+r)\sin t$; $CD = a\cos\left(t + t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin(t+t_1) = a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$. So erhält man als Gleichungen der Epicycloide:

$$x = (a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$$

$$y = (a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t.$$

Gleich. d. Tangente: $Y - y = (X - x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{r+2a}{2a}\right)t$

„ „ Normale: $Y - y = -(X-x)\,\mathrm{cotg}\left(\frac{r+2a}{2a}\right)t.$

Soll wieder bewiesen werden, dass die Normale von M durch den Berührungspunkt B des Erzeugungskreises geht, so muss man zeigen, dass $X = r\cos t$, $Y = r\sin t$, als Coordinaten von B, in Verbindung mit den Werthen für x und y die Gleichung der Normale befriedigen.

11) Die Cardioide ist ein besonderer Fall der Epicycloide und entspricht der Bedingung $a = r$. Ihre Gleichungen sind daher: $x = 2a\cos t - a\cos 2t = a(2\cos t + 1 - 2\cos^2 t)$; $y = 2a\sin t - a\sin 2t = 2a\sin t(1 - \cos t)$. Wird das System in der Weise transformirt, dass man $a - x$ statt x

setzt, so erhält man: $x = 2a\cos t(\cos t - 1)$; $\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} t$; $\cos t = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $x^2+y^2 = 4a^2(1-\cos t)^2$; $(x^2+y^2)^2 - 4ax(x^2+y^2) - 4a^2y^2 = 0$. Setzt man: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so gewinnt man die Polargleichung:

$$r = 2a(1+\cos\varphi) = 4a\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

12) Lässt man in den Gleichungen der Epicycloide $-a$ an die Stelle von $+a$ treten, so erhält man die Hypocycloide, wenn $r > a$, dagegen die Pericycloide, wenn $r < a$ ist. Bei der Entstehung der Hypocycloide wird der rollende Kreis von dem berührenden Bahnkreise umschlossen. Bei der Entstehung der Pericycloide umschliesst der rollende Kreis den berührenden Bahnkreis.

13) Die archimedische Spirale: $r = at$, oder $x = at\cos t$, $y = at\sin t$.

Tg.: $(Y-y)(\cos t - t\sin t) - (X-x)(\sin t + t\cos t) = 0$.

14) Die logarithmische Spirale: $r = a^t$.

Tg.: $\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\lg a\sin t + \cos t}{\lg a\cos t - \sin t} = k$.

Der Richtungscoefficient des Leitstrahls ist $k_1 = \operatorname{tg} t$. Man kann beweisen, dass $\operatorname{tg} v = \frac{k-k_1}{1+kk_1} = \frac{1}{\lg a}$, d. h. dass der Winkel v, welchen die Tangente mit dem Leitstrahl bildet, bei dieser Curve constant ist.

§ 2. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte (Spitzen), conjugirte (isolirte) Punkte.

Wenn in Formel (2) durch die Coordinaten des Berührungspunktes $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird, so nimmt $\frac{dy}{dx}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, und damit wird für diesen Punkt, (den wir als im

Endlichen gelegen annehmen), die Richtung der Tangente unbestimmt. Als wahren Werth dieses unbestimmten Ausdrucks finden wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx}}{\frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx}} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}},$$

und daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}. \qquad (9)$$

Vorausgesetzt, dass dieser Ausdruck nicht nochmals unbestimmt wird, gibt er uns für $\frac{dy}{dx}$ im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe, und daraus folgern wir, dass die Curve in diesem Punkt zwei verschiedene Tangenten besitzt, was nur dadurch möglich wird, dass sich 2 Curvenäste in diesem Punkt durchschneiden. Ein solcher Punkt wird Doppelpunkt genannt. Damit aber die beiden Werthe reell und verschieden ausfallen, muss $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sein. Ist dagegen $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so fallen die beiden Tangenten in Eine zusammen, die Curvenschleife verschwindet alsdann, und der Doppelpunkt wird zu einem Rückkehrpunkt. Wird endlich $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so wird $\frac{dy}{dx}$ imaginär. Der Punkt gehört dann der Curve an, lässt aber keine Tangente zu, weil er mit den übrigen Theilen der Curve nicht in Verbindung steht. Wir nennen ihn einen isolirten oder conjugirten Punkt. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte und isolirte Punkte haben hiernach die gemeinsame Eigenschaft, dass ihre Coordinaten den Gleichungen:

$$f(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (10)$$

genügen müssen. Aber man hat:

Einen Doppelpunkt, wenn $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

„ Rückkehrpunkt, „ „ $=$ „

„ isolirten Punkt, „ „ $<$ „

Wird aus (9) der Werth für $\frac{dy}{dx}$ in (1) substituirt, so entsteht die für die Variabelen X und Y quadratische Gleichung:

$$(Y-y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2(Y-y)(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (X-x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (11)$$

deren geometrischer Ort die beiden Tangenten des Doppelpunktes sind. Für den Rückkehrpunkt bildet die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Quadrat.

Ist die Curve durch die beiden Gleichungen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so wird für den Doppelpunkt die Gleichung der Tangente (5) nicht unbestimmt, und das Kriterium des Doppelpunktes wird ein ganz anderes, als bisher. Der Doppelpunkt hat dann die Eigenthümlichkeit, dass zwei ganz verschiedene Werthe von t gleiche Werthe für x und gleiche Werthe für y erzeugen müssen. Wir drücken diese Bedingung so aus:

$$x = \varphi(t) = \varphi(t_1); \quad y = \psi(t) = \psi(t_1). \quad (12)$$

Die Lösungen beider Gleichungen sind die Parameter der Doppelpunkte. Werden die zusammengehörigen Werthe t und t_1 nach einander in (5) substituirt, so erhält man die beiden Tangenten eines Doppelpunktes.

Rücken die Werthe t und t_1, welche einem Doppelpunkt entsprechen, einander immer näher, so wird die Curvenschleife immer kleiner und verschwindet zuletzt ganz, wenn t mit t_1 zusammenfällt. Der Punkt wird dadurch ein Rückkehrpunkt; für ihn muss nicht nur $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, $\psi(t) = \psi(t_1)$ sein, sondern auch t_1 mit t zusammenfallen. Nun sind für den Doppelpunkt die Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_1)}{t - t_1} = 0, \qquad \frac{\psi(t) - \psi(t_1)}{t - t_1} = 0,$$

wie eng auch die Curvenschleife gemacht werde. Diese Gleichun-

gen bleiben also auch für den Grenzfall bestehen, d. h. wir haben für den Rückkehrpunkt:

$$\lim \frac{\varphi(t) - \varphi(t_1)}{t - t_1} = 0, \qquad \lim \frac{\psi(t) - \psi(t_1)}{t - t_1} = 0, \quad \text{oder}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0. \tag{13}$$

Der Richtungscoefficient $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ erscheint jetzt in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und hat den wahren Werth $\frac{d^2y}{dt^2} : \frac{d^2x}{dt^2}$. Die Gleichung der zusammenfallenden Tangenten eines Rückkehrpunktes ist dann:

$$\left\{(Y - y)\frac{d^2x}{dt^2} - (X - x)\frac{d^2y}{dt^2}\right\}^2 = 0. \tag{14}$$

Es wird nicht überflüssig sein, den Rückkehrpunkt noch aus einem andern Gesichtspunkte zu betrachten.

Wir nehmen auf einer stetig verlaufenden Curve drei unendlich nahe liegende Punkte, die in der Anordnung 1, 2, 3 auf einander folgen, wenn man die Curve von einem beliebig gewählten Anfangspunkte bis zu einem beliebigen Endpunkte durchläuft. Wir ziehen im Punkte 1 und im Punkte 2 die einseitigen Tangenten im Sinne des wachsenden Curvenbogens, d. h. die geraden Verbindungslinien, welche von 1 über 2 hinaus resp. von 2 über 3 hinaus einseitig verlaufen. Die Curve heisst im Punkte 2 stetig gekrümmt, wenn diese einseitig gezogenen Tangenten einen unmessbar kleinen Winkel mit einander einschliessen. Dagegen findet in der Stetigkeit der Krümmung eine Unterbrechung statt, wenn die beiden Tangenten einen endlichen Winkel einschliessen. In diesem Falle wird der Punkt 2 eine Spitze genannt. Ein Rückkehrpunkt ist eine Spitze, in welcher die Tangenten 1, 2 und 2, 3 einen Winkel von 180° mit einander bilden. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur den Rückkehrpunkt aus dem Doppelpunkte entstehen zu lassen. Nimmt man zuerst die Punkte 1, 2, 3 in endlicher Entfernung, so hat man jetzt die Punkte

1 und 3 in den Doppelpunkt zu legen und den Punkt 2 an irgend eine Stelle der Curvenschleife. Die Sehnen 1, 2 und 2, 3 fallen dann in dieselbe gerade Linie, aber ihre Richtungen sind entgegengesetzt. Sie schliessen einen Winkel von 180^0 Grad ein. Dies bleibt gültig, wie eng man auch die Schleife machen möge. Es gilt auch noch für den Grenzfall einer unendlich engen Schleife, d. h. für den Rückkehrpunkt. In diesem Falle ist die Sehne 1, 2 in die letzte Tangente vor dem Rückkehrpunkte übergegangen, die Sehne 2, 3 in die erste Tangente nach dem Rückkehrpunkte. Beide Tangenten hat man einseitig im Sinne des wachsenden Bogens zu ziehen. Bei dieser Auffassung erhält man aus (14) die Gleichungen der beiden Tangenten einzeln genommen, indem man auf beiden Seiten der Gleichung (14) die Quadratwurzel auszieht und der ausgezogenen Wurzel links einmal das Zeichen $+$, das andere mal das Zeichen $-$ vorsetzt.

15) Die Lemniskate: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ hat in $x=0$, $y=0$ einen D.-P., dessen beide Tangenten: $Y=\pm X$ unter Winkeln von 45^0 und 135^0 die x-Achse durchschneiden, also zu einander senkrecht sind.

16) Cissoide: $y^2(2r-x)-x^3=0$; Rückkehrpunkt: $x=0$, $y=0$; Tg.: $Y^2=0$.

17) Neil'sche Parabel: $x^3-py^2=0$; Rückkehrpunkt: $x=0$, $y=0$; Tg.: $Y^2=0$.

18) $f=x^4+a^2x^2-a^2y^2=0$; D.-P.: $x=0$, $y=0$; Tg.: $Y=\pm X$.

19) $f=x^3+xy^2-2x^2-2y+2=0$; Rückkehrpunkt: $x=1$, $y=1$; Tg.: $(Y+X-2)^2=0$.

20) $f=y^2-x^3-x^2=0$; D.-P.: $x=y=0$; Tg.: $Y=\pm X$.

21) $f=x^4+y^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0$; D.-P.: $x=\pm b$, $y=0$; Tg.: $Y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{2}\,(X+b)$; $Y=\pm\frac{b\sqrt{2}}{a}(X-b)$.

22) $f=x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$; D.-P.: $x_1=a$, $y_1=0$; $x_2=-a$, $y_2=0$; $x_3=0$, $y_3=-a$; Tg.: $Y=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X-a)$; $Y=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X+a)$; $Y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}X-a$.

23) $f = (y-b)^2 - (x-a)^5 = 0$; Rückkehrpunkt: $x = a$; $y = b$; Tg.: $(Y-b)^2 = 0$.

24) $f = 5y^3 + 10y - x^3 + 2x^2 + 5 = 0$. Der Punkt $x = 0$, $y = -1$ ist ein conjugirter Punkt.

25) $f = (y-x)^2 - x^3 = 0$; Rückkehrpunkt: $x = 0$, $y = 0$; Tg.: $Y = X$.

26) $f = ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$; $x = 0$, $y = 0$ ein conjugirter Punkt.

27) $f = y^2 - (2-x)^2(1-x) = 0$; $x = 2$, $y = 0$ ein conjugirter Punkt.

28) Fusspunktlinie der Ellipse: $ax^2 + by^2 - (x^2+y^2)^2 = 0$; $x = 0$, $y = 0$ ein conjugirter Punkt.

29) $y = ax + b\sqrt{\sin x - 1}$ stellt ein System isolirter Punkte dar: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $y_1 = \frac{a\pi}{2}$; $x_2 = \pi$, $y_2 = a\pi$ u. s. w., die alle auf der Geraden $y = ax$ liegen.

30) Die Cycloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\varphi'(t) = a(1 - \cos t) = 0$, $\psi'(t) = a \sin t = 0$. Da beiden Gleichungen die Lösungen $t = 0$, 2π, 4π u. s. w. genügen, so sind $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 2a\pi$, $y_2 = 0$; $x_3 = 4a\pi$, $y_3 = 0$ u. s. w. Rückkehrpunkte. Die Tangenten sind senkrecht zur Achse.

31) Die Evolute der Ellipse:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

hat 4 Rückkehrpunkte, welchen die Parameter 0, $\frac{\pi}{2}$, π $\frac{3\pi}{2}$ entsprechen.

§ 8. Krümmungskreis und Evolute.

Wählt man auf einer Curve drei einander nahe gelegene Punkte 1, 2, 3, zieht die Sehnen 1 — 2 und 2 — 3, und errichtet in der Mitte beider je eine Senkrechte, so ist der Schnittpunkt dieser Senkrechten der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die drei Punkte geht. Indem diese einander immer näher rücken,

werden die Sehnen immer kürzer und im Grenzfalle zu Curvenelementen, welche zugleich auch dem Kreis angehören. Die beiden Senkrechten werden dabei zu zwei unendlich nahe gelegenen Normalen, und der Kreis selbst wird zum Krümmungskreis. Die Stärke der Krümmung einer Curve in einem bestimmten Punkt wird gemessen durch die Grösse der Krümmung des dem betreffenden Punkt zugehörigen Krümmungskreises und da diese mit wachsendem Halbmesser $= \varrho$ abnimmt, so ist der reciproke Werth dieses Halbmessers, nämlich $\frac{1}{\varrho}$, ein Ausdruck für das Mass der Krümmung. Wir beginnen mit der Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes für die Gleichungsform: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, legen durch zwei vorerst noch endlich entfernte Punkte x, y und x_1, y_1 zwei Normalen und bestimmen deren Schnittpunkt. Die Gleichungen dieser Normalen sind:

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0. \qquad (15)$$

$$(X - x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + (Y - y_1)\frac{dy_1}{dt_1} = 0. \qquad (16)$$

Die Coordinaten X und Y des Schnittpunktes genügen beiden Gleichungen. Die Gleichung (15) wird erfüllt, wenn man ansetzt:

$$X = x - m\frac{dy}{dt}, \qquad Y = y + m\frac{dx}{dt}. \qquad (17)$$

Diese Ausdrücke für X und Y sind in (16) einzuführen, so erhält man eine Gleichung für m:

$$\left(x - m\frac{dy}{dt} - x_1\right)\frac{dx_1}{dt_1} + \left(y + m\frac{dx}{dt} - y_1\right)\frac{dy_1}{dt_1} = 0$$

$$m = \frac{(x - x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + (y - y_1)\frac{dy_1}{dt_1}}{\frac{dy}{dt}\frac{dx_1}{dt_1} - \frac{dx}{dt}\frac{dy_1}{dt_1}}. \qquad (18)$$

Wird dieses m in (17) substituirt, so gewinnen wir den Schnittpunkt zweier endlich entfernten Normalen. Da aber dieser Schnittpunkt unter der Voraussetzung gefunden werden soll, dass die Normalen unendlich wenig von einander entfernt sind,

so ist in (18) ein Grenzübergang auszuführen und dieser Ausdruck zunächst entsprechend umzuformen.

$$m = \frac{\left[\frac{x - x_1}{t - t_1}\right]\frac{dx_1}{dt_1} + \left[\frac{y - y_1}{t - t_1}\right]\frac{dy_1}{dt_1}}{\left[\frac{\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]\frac{dx}{dt} - \left[\frac{\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]\frac{dy}{dt}}. \qquad (19)$$

Geht man jetzt zur Grenze über, so wird:

$$m = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}. \qquad (20)$$

Nun werden die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes gefunden, wenn man dieses m in (17) substituirt.

$$X = x - \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$Y = y + \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}. \qquad (21)$$

Die Entfernung der beiden Punkte X, Y und x, y oder der Krümmungshalbmesser, wird nach folgenden Formeln berechnet:

$$\varrho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = m\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^3}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}. \qquad (22)$$

Geht in dieser Entwicklung t über in x, so wird $y = \psi(x)$ oder $= f(x)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, und daher:

$$m = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{23}$$

$$X = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{24}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{25}$$

Ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben und von der Form: $r = f(t)$, so ist $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Die Formeln (21) und (22) gehen dann in folgende über:

$$X = x - \frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\sin t + r\cos t\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}}. \tag{26}$$

$$Y = y + \frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\cos t - r\sin t\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}}. \tag{27}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]^3}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2}} \tag{28}$$

Wenn endlich die Curvengleichung in der Form $f(x, y) = 0$ vorliegt, so werden nach (7) zwei zunächst wieder endlich von einander entfernte Normalen der Punkte x, y und x_1, y_1 durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{29}$$

$$(X - x_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - (Y - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0. \tag{30}$$

Zur Bestimmung der Schnittpunktscoordinaten X, Y setzt man aus (29):

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = m_1,$$

substituirt dann:

$$X = x + m_1 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = y + m_1 \frac{\partial f}{\partial y} \tag{31}$$

in (30) und erhält:

$$\left(x - x_1 + m_1 \frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial y_1} - \left(y - y_1 + m_1 \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$m_1 = \frac{(x_1 - x)\frac{\partial f}{\partial y_1} - (y_1 - y)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x_1}}$$

$$m_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}}{x_1 - x}\right] - \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x}}{x_1 - x}\right]\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{32}$$

Rücken beide Normalen unendlich nahe zusammen, so wird ihr Schnittpunkt zum Krümmungsmittelpunkt. Hierbei sind in dem Werth von m_1 folgende Grenzübergänge auszuführen:

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ wird $= \frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}$; $\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx}$;

$$\lim\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}}{x_1 - x}\right] = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx};$$

$$\lim\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x}}{x_1 - x}\right] = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Werden diese Werthe in (32) eingeführt und $-\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt, so erhält man denjenigen Werth von m_1, welcher in (31) substituirt, uns X und Y als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes giebt. Man erhält:

$$m_1 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}. \quad (33)$$

$$\varrho = \pm m_1 \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^3}}{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}. \quad (34)$$

Man kann zu der Formel (34) auch dadurch gelangen, dass man von (23) und (25) ausgeht und dort einsetzt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Hier ist leicht zu erkennen, dass $m = m_1 \frac{\partial f}{\partial y}$ ist. Es ist also in (34) das positive oder das negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem $\frac{\partial f}{\partial y}$ positiv oder negativ ist. Dann stimmen die Werthe von ϱ aus (25) und (34) vollständig überein.

Wir bezeichnen mit v den Winkel, den der Krümmungshalbmesser in der Richtung von der Curve nach dem Krümmungsmittelpunkte hin mit der Richtung der wachsenden x einschliesst Dann ist:

$$\cos v = \frac{X-x}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}}, \quad \sin v = \frac{Y-y}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}}.$$

Durch diese Gleichungen ist eindeutig entschieden, in welcher Richtung vom Curvenpunkte (x, y) aus man den Krümmungshalbmesser auf der Normale abzutragen hat. Man darf deshalb bei der Berechnung des Krümmungshalbmessers sich auf den absoluten Zahlwerth beschränken.

Wir unterscheiden die concave und die convexe Seite der Curve. An der Stelle, wo dieselbe drei unendlich nahe gelegene Punkte mit ihrem Krümmungskreise gemein hat, kehrt sie dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte ihre concave Seite zu. Die convexe Seite ist die abgekehrte.

Jedem Punkt der gegebenen Curve entspricht ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte wird Evolute genannt. Die beiden Gleichungen für X und Y bestimmen zusammen mit der Gleichung der gegebenen Curve die Gleichung dieser Evolute.

Die Elemente des Krümmungskreises für die folgenden Curven zu bestimmen:

32) Der Kreis: $x^2+y^2-r^2=0$; $m_1=-\frac{1}{2}$; $X=0$, $Y=0$; $\varrho=\mp r$. Der K.-K. fällt ganz mit dem gegebenen Kreis zusammen.

33) Die Ellipse: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;
$m=\frac{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}{ab}$; $X=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $Y=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$.
Wird aus beiden Gleichungen die Variabele t eliminirt, so erhält man als Gleichung der Evolute: $\sqrt[3]{b^2Y^2}+\sqrt[3]{a^2X^2}=\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}$. Auch ist $X=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3$, $Y=-\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3$; $\varrho=\frac{\{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t\}^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

34) Die Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
$m_1=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\frac{a^2b^2}{2}$;
$X=\frac{a^2+b^2}{a^4}x^3$, $Y=-\frac{a^2+b^2}{b^4}y^3$;
$\varrho=\pm a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

35) Die Parabel: $y^2-2px=0$; $m_1=-\frac{y^2+p^2}{2p^2}$; $X=3x+p$, $Y=-\frac{y^3}{p^2}$; $x=\frac{X-p}{3}$, $y^2=\sqrt[3]{p^4Y^2}$ in die Parabel-

gleichung substituirt, gibt als Evolute: $Y^2 = \frac{8}{27p}(X-p)^3$. Man sieht, dass diese Evolute die Neil'sche Parabel ist. Weiter ist $\varrho = \mp \frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2+y^2)^3}$.

36) Die Cissoide: $x^3 - y^2(2r-x) = 0$; $m_1 = -\frac{8r-3x}{6x(2r-x)}$;

$X = \frac{-rx(12r-5x)}{3(2r-x)^2}$, $Y = \frac{8r\sqrt{x}}{3\sqrt{(2r-x)}}$; $\varrho = \mp \frac{r\sqrt{x(8r-3x)^3}}{3(2r-x)^2}$.

37) Die Kettenlinie: $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $m = y$;

$X = x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$, $Y = y + \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = 2y$;

$\varrho = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{y^2}{a}$.

Das Stück der Normale zwischen der Curve und der Abscissenachse wird bei jeder Curve nach der Formel berechnet: $N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Da man hiernach bei der Kettenlinie $N = \frac{y^2}{a}$ findet, so erkennt man, dass die Normale dem Krümmungshalbmesser gleich ist. Sie liegen von der Curve aus einander entgegengesetzt.

38) Die Cycloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $m = -2$; $X = a(t + \sin t)$, $Y = -a(1 - \cos t) = -y$. Beide Gleichungen repräsentiren zusammen die Evolute der Cycloide. Setzt man $t_1 + \pi$ statt t, so wird $X - a\pi = a(t_1 - \sin t_1)$, $Y + 2a = a(1 - \cos t_1)$; wird jetzt $X - a\pi$ durch X_1, $Y + 2a$ durch Y_1 ersetzt, was einer Verschiebung des Anfangspunktes um $a\pi$ und $-2a$ entspricht, so erhält man als Gleichungen der Evolute:

$$X_1 = a(t_1 - \sin t_1), \quad Y_1 = a(1 - \cos t_1),$$

und daraus folgt, dass die Evolute eine congruente Cycloide ist, die sich nur hinsichtlich der Lage dadurch von der gegebenen unterscheidet, dass ihr Anfangspunkt um $a\pi$

und $-2a$ verschoben ist. Wir finden $\varrho = -4a \sin \frac{t}{2}$, und da die Normale $= 2a \sin \frac{t}{2}$ gefunden wird, so ist der Krümmungshalbmesser der doppelten Normale gleich. Sie liegen von der Curve aus nach derselben Seite. Um den Krümmungsmittelpunkt zu construiren, hat man die Normale nur um sich selbst zu verlängern.

39) Die Epicycloide: $x = (a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$,

$y = (a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$; $m = \frac{2a}{r+2a}$

$$X = \frac{r}{r+2a}\left[(a+r)\cos t + a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t\right]$$

$$Y = \frac{r}{r+2a}\left[(a+r)\sin t + a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t\right]$$

$$\varrho = \frac{4a(r+a)}{r+2a}\sin\frac{r}{2a}t.$$

Der Kr.-Mittelpunkt wird auf folgende Weise construirt: Man zieht (Fig. 12) den Durchmesser MG, verbindet G mit A und verlängert die Normale MB; der Schnittpunkt K ist der gesuchte Kr.-Mittelpunkt und KM der Kr.-Halbmesser. Da GN parallel und gleich BM ist, so haben wir $KB = \frac{r}{r+2a}GN = \frac{r}{r+2a}BM$, und

$$KM = \left(1 + \frac{r}{r+2a}\right)BM = \frac{2(a+r)}{2a+r}BM =$$

$$= \frac{2(a+r)}{2a+r}2a\sin\frac{t_1}{2} = \frac{4a(a+r)}{2a+r}\sin\frac{rt}{2a} = \varrho.$$

40) Die Lemniskate: $r = a\sqrt{\cos 2t}$. Es ist $m = \frac{1}{3}$;

$$X = \frac{2a\cos^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}},\quad Y = -\frac{2a\sin^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}};\quad \varrho = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2t}} = \frac{a^2}{3r}.$$

Da $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, so ist $x^2 + y^2 = a^2\cos 2t$, oder $\cos 2t = \frac{x^2+y^2}{a^2}$, $\varrho = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}$. Drückt man

$\sin^2 t$ und $\cos^2 t$ durch die Coordinaten des Kr.-Mittelpunktes aus, so gewinnt man mit Hilfe der beiden Relationen: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ und $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ die Gleichung der Evolute: $3(X^{2/3} + Y^{2/3})\sqrt{X^{2/3} - Y^{2/3}} = 2a$.

41) Die logarithmische Spirale: $r = a^t$. Hier ist $m = 1$; $X = -a^t \lg a \sin t$, $Y = a^t \lg a \cos t$; $\varrho = a^t\sqrt{1 + (\lg a)^2}$. Um die Polargleichung der Evolute zu erhalten, setze man den Leitstrahl $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = a^t \lg a$. Wird $\lg a = a^\varepsilon$ gesetzt, so ist $R = a^{t+\varepsilon}$, d. h. die Evolute dieser Spirale ist eine gleiche Spirale, welche nur um den Bogen ε gedreht ist.

§ 4. Die Wende- oder Inflexionspunkte.

Liegen drei unendlich nahe Punkte einer Curve in einer geraden Linie, so wird der Krümmungshalbmesser an dieser Stelle unendlich gross. Es seien x und y die Coordinaten dieser Stelle. Dann werden hier auch $X - x$ und $Y - y$ unendlich gross. Aendern diese Differenzen dabei gleichzeitig ihr Vorzeichen, wenn man, die Curve stetig durchlaufend, durch den Punkt (x, y) hindurchgeht, so ändert die Curve an dieser Stelle die Art ihrer Krümmung. Ihre concave Seite geht in die convexe über und umgekehrt. Ein solcher Punkt (x, y) wird ein Wendepunkt oder Inflexionspunkt genannt.

Wir verbinden die Bedingungsgleichung für das Unendlichwerden des Krümmungshalbmessers mit der Gleichung der Curve und erhalten als Lösungen beider Gleichungen die Coordinaten aller Punkte, die Wendepunkte sein können. Sie sind wirklich Wendepunkte, wenn in ihnen der Vorzeichenwechsel der Differenzen $X - x$ und $Y - y$ eintritt.

Ist $f(x, y) = 0$ die gegebene Gleichung, so wird nach (34) ϱ unendlich, wenn:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich in Form einer Determinante schreiben. Alsdann lautet die Bedingungsgleichung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (35)$$

Wird die dritte Vertikalreihe mit $(n-1)$ multiplicirt, die ganze Determinante durch $(n-1)$ dividirt und 0 durch nf ersetzt, so erhält man:

$$\Delta = \frac{1}{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & nf \end{vmatrix} = 0. \qquad (36)$$

In der Determinante darf man die mit x multiplicirten Elemente der ersten und die mit y multiplicirten Elemente der zweiten Verticalreihe von denen der dritten Reihe subtrahiren. Dadurch ergibt sich:

$$\Delta = \frac{1}{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & nf - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \qquad (37)$$

Wird jetzt die gegebene Funktion $f(x, y) = 0$ in die homogene Funktion $f(x, y, z) = 0$ umgewandelt, so kann der Lehrsatz von Euler: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf$, wenn n den Grad der Funktion anzeigt, zur Anwendung kommen. Da aber $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ wieder homogene Funktionen sein müssen und zwar vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, so ist nach demselben Satz:

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$x\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (38)$$
$$x\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}+z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Mittelst dieser Relationen bringt man (37) auf die Form:

$$\Delta=\frac{1}{n-1}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & z\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} & z\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=0. \qquad (39)$$

Wird in dieser Determinante wieder $z=1$ gesetzt, so bildet sie die Bedingungsgleichung für das Unendlichwerden des Kr.-Halbmessers. Sie geht leicht in folgende über:

$$\Delta=\frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\\ (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=0.$$

Subtrahirt man von den Elementen der dritten Horizontalreihe die mit x multiplicirten Elemente der ersten und die mit y multiplicirten Elemente der zweiten Reihe, substituirt dann für die Elemente der dritten Reihe die Werthe aus (38) und setzt dabei $z=1$, unterdrückt ferner den constanten Factor, so erhält man:

$$\Delta_1=(n-1)^2\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix}=0. \qquad (40)$$

Die Schnittpunkte der beiden Curven $f=0$ und $\Delta=0$ lehren uns die Wendepunkte der Curve kennen. Ist $f=0$ vom

n^{ten} Grad, so muss die Inflexions-Determinante vom $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grad sein. Beide Gleichungen lassen daher im Allgemeinen $3n(n-2)$ Lösungen zu, und die Curve hat eben so viele Wendepunkte. Curven des zweiten Grades können demnach keine Wendepunkte besitzen.

Ist die Curve durch die beiden Gleichungen gegeben: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so wird der Krümmungshalbmesser nach (22) unendlich, wenn:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad (41)$$

und aus dieser Gleichung entnehmen wir die Parameter der Wendepunkte.

Für die Form $y = f(x)$ wird nach (23) der Krümmungshalbmesser unendlich, wenn:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (42)$$

Die reellen im Endlichen gelegenen Wendepunkte folgender Curven zu finden:

42) $f = x^3 + y^3 + 6axy + 1 = 0$. Homogene Form: $x^3 + y^3 + 6axyz + z^3 = 0$.

$$\Delta_1 = 6^3 \begin{vmatrix} x & az & ay \\ az & y & ax \\ ay & ax & z \end{vmatrix}$$

$\frac{1}{6^3}\Delta_1 = xyz(1+2a^3) - a^2(x^3+y^3+z^3) = 0$; $z = 1$ gibt: $x^3 + y^3 + 1 - \frac{1+2a^3}{a^2}xy = 0$. Aus dieser Gleichung und $f = 0$ finden wir: $x = 0$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 0$ als Coordinaten der Wendepunkte.

43) $f = x^3 - 3ax^2 + c^2y = 0$. Homogene Form: $x^3 - 3ax^2z + c^2yz^2 = 0$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6(x-az) & 0 & -6ax \\ 0 & 0 & 2c^2z \\ -6ax & 2c^2z & 2c^2y \end{vmatrix}$$

$-\Delta_1 = 24(x-a)c^4 = 0$. Aus $\Delta_1 = 0$ und $f = 0$ findet man $x = a$, $y = \frac{2a^3}{c^2}$ als Coordinaten eines Wendepunktes.

44) $f = x^3y - x + y = 0$, oder $x^2y - xz^2 + yz^2 = 0$. Bedingung: $x^3 - x^2y - 2x - y = 0$. Wendepunkte: $x = 0$, $y = 0$; $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

45) $f = (a-x)^5 - y = 0$. Bedingung: $(a-x)^5 = 0$. Wendepunkt: $x = a$, $y = 0$.

46) $f = x^4 - a^2x^2 + a^3y = 0$. Wendepunkt: $x = \pm\frac{a}{\sqrt{6}}$, $y = \frac{5a}{36}$.

47) $f = y - x^3 = 0$. Wendepunkt: $x = 0$, $y = 0$.

48) Die Wendepunkte eines Kegelschnitts sollen aus der allgemeinen Gleichung:

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

gefunden werden.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2C & 2B & 2E \\ 2B & 2A & 2D \\ 2E & 2D & 2F \end{vmatrix}.$$

Die Determinante Δ ist von x und y unabhängig. Ist sie von Null verschieden, so hat der Kegelschnitt keine Wendepunkte. Ist aber diese Verbindung von Constanten identisch $= 0$, so hat der Kegelschnitt an jeder Stelle die Krümmung Null und besteht dann aus einem System von zwei geraden Linien.

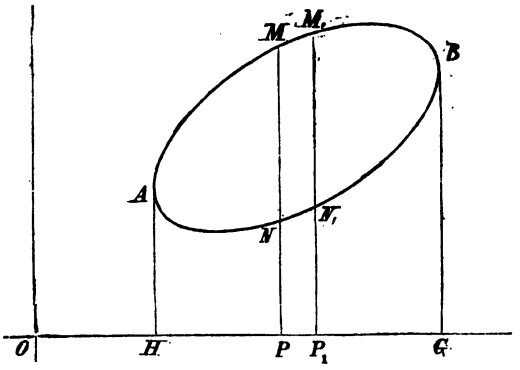
49) Die Wendepunkte der Curve $y = \sin x$ zu finden.

$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ u. s. w., $y = 0$.

§ 5. Der Flächeninhalt begrenzter Figuren.

Um das von der Curve $AMBNA$ eingeschlossene Flächenstück (Fig. 13) zu finden, theilen wir dasselbe durch unmessbar nahe gelegene Ordinaten in lauter elementare Streifen, wie MNN_1M_1, die unter dieser Voraussetzung als schmale Rechtecke angesehen werden können.

Fig. 13.

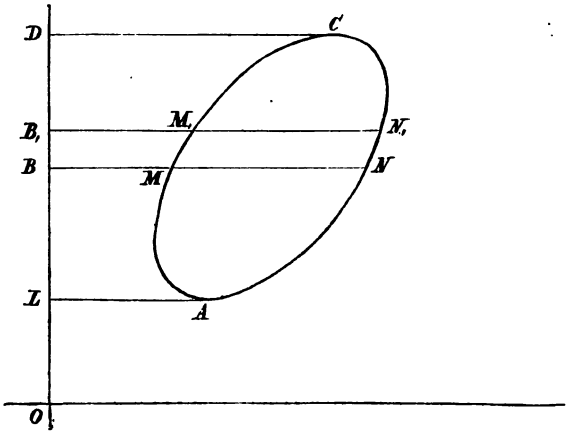


Ist $MP = Y_i$, $NP = y_i$, $M_1P_1 = Y_{i+1}$, $N_1P_1 = y_{i+1}$, $OP = x_i$, $OP_1 = x_{i+1}$, $OH = a$, $OG = a$, so ist die Fläche eines solchen Rechtecks $MNN_1M_1 = (Y_i - y_i) \cdot \lim (x_{i+1} - x_i)$ für $\lim (x_{i+1} - x_i) = dx$, und die Summe aller Rechtecke, oder die ganze Fläche:

$$\text{Fl. } AMBNA = \lim \Sigma (Y_i - y_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^a (Y - y)\, dx. \quad (43)$$

Wenn statt der Curve ANB die Achse HG als untere Grenze eintritt, so ist $y = 0$ zu setzen. Man hat dann:

Fig. 14.



$$\text{Fl. } HAMBGH = \int_{\alpha}^{a} Y\,dx. \qquad (44)$$

Wird (Fig. 14) die Fläche durch Linien, welche parallel zur x-Achse liegen, in elementare Streifen, wie MNN_1M_1 zerlegt und $MB = x_1$, $NB = X_1$, $OB = y_1$, $OB_1 = y_{1+1}$, $OL = \beta$, $OD = b$ gesetzt, so ist

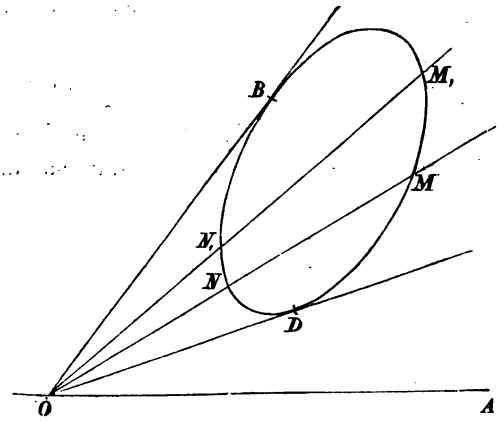
$MM_1N_1N = (X_1 - x_1) \lim (y_{1+1} - y_1)$ für $\lim (y_{1+1} - y_1) = dy$, und

$$\text{Fl. } AMCNA = \lim \Sigma (X_1 - x_1)(y_{1+1} - y_1) = \int_{\beta}^{b} (X - x)\,dy. \qquad (45)$$

$$\text{Wieder wird Fl. } ALDCNA = \int_{\beta}^{b} X\,dy. \qquad (46)$$

Ist endlich die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben, so zerlege man die Fläche in elementare Streifen von

Fig. 15.



der Form MM_1N_1N und setze $OM = R$, $ON = r$, $OM_1 = R_1$, $ON_1 = r_1$, Wkl. $MOA = t$, Wkl. $M_1OA = t_1$, Wkl. $DOA = \gamma$, Wkl. $BOA = C$. Da nach der Voraussetzung der Winkel $M_1OM = t_1 - t$ unmessbar klein ist und deshalb die Bögen MM_1 und NN_1 als gerade Linien anzusehen sind, so ist:

$$\text{Fl. } NMM_1N_1 = \lim \frac{(RR_1 - rr_1) \sin (t_1 - t)}{2}.$$

Fl. $BNDMB = \lim \frac{\Sigma(RR_1 - rr_1)\sin(t_1 - t)}{2} = \int_\gamma^C \frac{R^2 - r^2}{2} dt$, (47)

weil in der Grenze $R_1 = R$, $r_1 = r$ und $\sin(t_1 - t) = \text{arc}(t_1 - t) = dt$ wird. Soll wieder die Fläche $OBMDO$ berechnet werden, so ist $r = 0$ zu setzen, wodurch entsteht:

$$\text{Fl. } OBMDO = \int_\gamma^C \frac{R^2}{2} dt. \qquad (48)$$

50) Man soll das Flächenstück berechnen, welches zwischen einem Parabelbogen, der Ordinate y und der x-Achse liegt; $y^2 = 2px$.

$$\text{Fl. } = \int_0^x y\, dx = \int_0^x \sqrt{2px}\, dx = \frac{2}{3} xy.$$

Der Parabelbogen, vom Anfangspunkt gerechnet, theilt das aus Abscisse und Ordinate des Endpunktes construirte Rechteck so, dass zwei Drittheile desselben die Parabelfläche bilden.

51) Die Fläche eines Kreises zu finden; $x = r\cos t$, $y = r\sin t$.

$dx = -r\sin t\, dt$; für $x = 0$ ist $t = \frac{\pi}{2}$, für $x = r$ ist $t = 0$.

$$\text{Fl. } = 4\int_0^r y\, dx = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 r^2 \sin^2 t\, dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = r^2\pi.$$

52) Die Fläche einer Ellipse zu finden; $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

$$\text{Fl. } = 4\int_0^a y\, dx = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2 t\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = ab\pi.$$

53) Man soll das Flächenstück berechnen, welches zwischen einem Hyberbelbogen und einer zur x-Achse senkrechten Sehne liegt; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Fl. } = 2\int_a^x y\, dx = 2b\int_a^x dx \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Zum Zweck der Transformation setzen wir $x = a\frac{e^t + e^{-t}}{2}$,

$y = b\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}$, durch welche die Werthe der Curvengleichung befriedigt wird. Da $x = a$ wird für $t = 0$, und $dx = a\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}\,dt$ ist, so ist:

$$\text{Fl.} = \frac{ab}{2}\int_0^t (e^t - e^{-t})^2\,dt = \frac{ab}{2}\left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} - 2t\right) = xy - abt.$$

Ferner ist $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = e^t$, oder $t = \lg\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$.

$$\text{Fl.} = xy - ab\lg\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

54) Man zeichne eine Hyperbel nebst ihren beiden Asymptoten. Curvengleichung: $xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = m^2$. Es sei A der Anfangspunkt des Systems, S der Scheitel, SB die Ordinate, $AB = p$ die Abscisse des Scheitels; MD die Ordinate, $AD = x$ die Abscisse des beliebigen Punktes M, α der Asymptotenwinkel. Die Fläche $SBDM$ soll berechnet werden.

Weil das System schiefwinkelig ist, so ist das Differential der Fläche $= y \sin\alpha\,dx$, und:

$$\text{Fl.} = \sin\alpha\int_p^x \frac{m^2}{x}\,dx = m^2\,(\lg x - \lg p)\sin\alpha.$$

55) Die Fläche zwischen einer Cycloide und ihrer x-Achse zu finden; $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

$$\text{Fl.} = \int_0^{2a\pi} y\,dx = a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = 3a^2\pi.$$

56) Eine Curve hat von $t = 0$ bis $t = \pi$ die Gleichungen: $x = a\,(1 - \cos t)$, $y = at$; man soll die Fläche zwischen der Curve, der Ordinate für $t = \pi$ und der x-Achse finden.

$$\text{Fl.} = a^2\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = a^2\pi.$$

57) Die Fläche zu berechnen, welche von einer Epicycloide und den beiden nach ihren Endpunkten gezogenen Halbmessern des Grundkreises eingeschlossen wird;

$$x = (a + r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t,$$

$$y = (a + r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t.$$

Denken wir uns (Fig. 12) die angefangene Curve EM so weit gezeichnet, bis sie in einem Punkte Q den Grundkreis wieder trifft, so soll die Fläche $AEMQA$ berechnet werden. Man ziehe Leitstrahl $AM = R$ und setze Wkl. $MAE = \varphi$, so ist:

$$\text{Fl. } AEMQA = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} R^2\, d\varphi.$$

Da aber $R^2 = x^2 + y^2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, $\cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, wenn x, y die Coordinaten von M sind, so ist:

$$d\frac{\operatorname{tg}\varphi}{dt} = \frac{d\frac{y}{x}}{dt}, \text{ oder } \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{R^2} = \frac{(a+r)(2a+r)\left[1 - \cos\frac{r}{a}t\right]}{R^2}.$$

$$\text{Fl.} = \frac{1}{2}\int_0^t R^2\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \frac{(a+r)(2a+r)}{2}\int_0^t\left(1 - \cos\frac{r}{a}t\right)dt.$$

Für die Fläche $AEMQA$ hat der Erzeugungskreis eine ganze Umdrehung vollendet, so dass $rt = 2a\pi$, oder $t = \frac{2a\pi}{r}$ sein muss.

$$\text{Fl. } AEMQA = \frac{(a+r)(2a+r)}{2}\int_0^{\frac{2a\pi}{r}}\left(1 - \cos\frac{r}{a}t\right)dt =$$

$$= \frac{(a+r)(2a+r)a\pi}{r}.$$

Wird davon der Kreisausschnitt $AEQA = ar\pi$ abgezogen, so bleibt die Fläche $EMQBE$ zurück.

58) Die Cardioidenfläche erhält man aus der vorhergehenden Formel, indem man $r = a$ setzt. Fl. $= 6a^2\pi$.

59) Die Fläche der Lemniskate: $R^2 = a^2 \cos 2t$ zu finden.

$$\text{Fl.} = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt = a^2.$$

60) Die Fläche der archimedischen Spirale: $R = at$ soll für einen Umlauf des Leitstrahls gefunden werden.

$$\text{Fl.} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} t^2 \, dt = \frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

§ 6. Rectification ebener Curven.

Sind M und M_1 zwei beliebige Curvenpunkte, x, y und x_1, y_1 deren Coordinaten, so ist die Sehne:

$$MM_1 = s = \sqrt{(y-y_1)^2 + (x-x_1)^2} = (x-x_1)\sqrt{1 + \left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)^2}.$$

Beim Grenzübergang erhält man als Differential des Bogens:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Sind α und a die Abscissen der beiden Punkte A und B, so ist:

$$S = \text{arc } AB = \int_\alpha^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (49)$$

Soll arc AB aus den Ordinaten der Endpunkte berechnet werden, so setze man:

$$s = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = (y-y_1)\sqrt{1 + \left(\frac{x-x_1}{y-y_1}\right)^2},$$

woraus beim Grenzübergang entsteht: $ds = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, und, wenn β und b die Ordinaten der Endpunkte A, B sind:

$$S = \text{arc } AB = \int_\beta^b dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \qquad (50)$$

Für die Gleichungsform: $f(x, y) = 0$ wird aus (49):

$$S = \int_\alpha^a dx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} : \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (51)$$

und daraus wieder, weil $\frac{\partial f}{\partial x} dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dy$ ist,

$$S = -\int_{\beta}^{b} dy \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} : \frac{df}{\partial x}. \qquad (52)$$

Ist endlich die Curve durch die beiden Gleichungen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, und ist weiter $\alpha = \varphi(\gamma)$, $a = \varphi(c)$, so geht (49) über in:

$$S = \int_{\gamma}^{c} dt \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \qquad (53)$$

61) Die Peripherie eines Kreises zu berechnen; $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.

$$S = \int_0^{2\pi} dt \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)\, r^2} = 2r\pi.$$

62) Die Länge eines Parabelbogens vom Scheitel bis zum Punkt x, y zu finden; $y^2 = 2px$.

$$S = \int_0^{y} dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \lg\left[\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}\right].$$

63) Den Bogen einer Neil'schen Parabel zu finden, vom Anfangspunkt bis zum Punkt x, y; $y^2 = ax^3$.

$$S = \int_0^{x} dx \sqrt{1 + \frac{9ax}{4}} = \frac{8}{27a}\left[\left(1 + \frac{9ax}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

64) Der Bogen einer Kettenlinie vom tiefsten Punkte bis zum Punkt x, y soll berechnet werden; $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$.

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^{x} dx \sqrt{4 + \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \sqrt{y^2 - m^2}.$$

Der Bogen einer Kettenlinie, genommen vom tiefsten Punkte bis zum Punkt x, y, ist gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete $= m$ die Ordinate des tiefsten Punktes und dessen Hypotenuse die Ordinate des Endpunktes ist.

65) Es soll die Bogenlänge der Cycloide gefunden werden; $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$S = a\int_0^{2\pi} dt \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

66) Die Bogenlänge einer Epicycloide zu berechnen.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4(a+r)^2\sin^2\frac{r}{2a}t.$$

$$S=2(a+r)\int_0^{\frac{2a\pi}{r}}\sin\frac{r}{2a}t\,dt=\frac{8a(a+r)}{r}.$$

Setzt man $a=r$, so erhält man $16a$ als Länge der Cardioide.

67) Die Länge des Bogens der archimedischen Spirale zu finden; $r=at$.

$$S=a\int_0^t\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{a}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\lg\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right].$$

68) Den Umfang einer Ellipse zu berechnen; $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Ein Quadrant ist gleich:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2t}$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t},\quad\text{wenn }\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2\text{ ist.}$$

$$S=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2t-\frac{1}{8}\varepsilon^4\cos^4t-\frac{1}{16}\varepsilon^6\cos^6t-\cdots\right]dt$$

$$S=\frac{a\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3\varepsilon^4-\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\varepsilon^6-\cdots\right].$$

§ 7. Die Oberfläche von Rotationskörpern.

Wird eine Curve um ihre x-Achse gedreht, so erzeugt sie eine krumme Oberfläche. Ist die Ordinate eines sich drehenden Curvenelements $=y$, so ist das Differential der Oberfläche gleich der Oberfläche eines kleinen Cylindermantels, dessen Umfang $=2y\pi$, und dessen Seite $=ds$, d. h. gleich dem Differential des Bogens ist. Hiernach ist das Differential der Oberfläche $dO=2y\pi ds$, und:

$$O=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx. \qquad (54)$$

69) Die Oberfläche einer Kugelhaube zu finden, wenn

$$y = \sqrt{2rx - x^2}$$

die Scheitelgleichung des Erzeugungskreises und h die Höhe der Haube ist.

$$O = 2\pi \int_0^h dx \sqrt{2rx - x^2} \sqrt{1 + \frac{(r-x)^2}{2rx - x^2}} = 2r\pi h.$$

70) Die Mantelfläche eines Kegels zu berechnen.

Ist $y = kx$ die Gleichung der Geraden, die durch Umdrehung den Kegelmantel erzeugt, und h die Höhe des Kegels, so ist:

$$O = 2k\pi \sqrt{1 + k^2} \int_0^h x\,dx = k\pi h^2 \sqrt{1 + k^2}.$$

Da $k = \operatorname{tg} \alpha$, wenn α der Richtungswinkel der erzeugenden Geraden, so ist $kh = r =$ Basishalbmesser, und $h\sqrt{1 + k^2} = s =$ Länge der Erzeugungslinie. Durch Substitution dieser Werthe erhält man: $O = r\pi s$.

71) Es soll die Oberfläche des Körpers gefunden werden, der entsteht, wenn sich eine Cycloide um ihre x-Achse dreht. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$O = 2a^2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt =$$

$$= 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

72) Die Oberfläche eines Rotations-Paraboloides zu berechnen. Parabelgleichung: $y^2 = 2px$.

$$O = 2\pi\sqrt{p} \int_0^x dx \sqrt{p + 2x} = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3} [(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}].$$

73) Man soll die Oberfläche eines Ellipsoides berechnen, das entsteht, wenn sich eine Ellipse um eine ihrer Achsen dreht.

Erstens: Drehung um die grosse Achse:

Ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ die Gleichung der Curve, so ist

$$\frac{1}{2} O = \frac{2b\pi}{a^2} \int_0^a dx \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}.$$

Wir setzen $a^2 - b^2 = e^2$ und erhalten:

$$\frac{1}{2}O = \frac{2b\pi}{a^2}\int_0^a dx\sqrt{a^4 - e^2x^2}$$

$$\frac{1}{2}O = \frac{b\pi}{a^2}\left[x\sqrt{a^4 - e^2x^2} + \frac{a^4}{e}\arcsin\frac{ex}{a^2}\right]_0^a$$

$$\frac{1}{2}O = b^2\pi + \frac{a^2b\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Zweitens: Drehung um die kleine Achse:

$$\frac{1}{2}O = \frac{2a\pi}{b^2}\int_0^b dy\sqrt{b^4 + e^2y^2}$$

$$\frac{1}{2}O = \frac{a\pi}{b^2}\left[y\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{b^4}{e}\lg(e^2y + e\sqrt{b^4 + e^2y^2})\right]_0^b$$

$$\frac{1}{2}O = a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\lg\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Was wird aus beiden Resultaten für $b = a$?

§ 8. Der Cubikinhalt von Rotationskörpern.

Wird ein Körper dadurch erzeugt, dass sich die zwischen einer Curve und der x-Achse gelegene Fläche um diese x-Achse dreht, so ist das Differential des Volumens $dV = y^2\pi\,dx$, und des Volumen

$$V = \pi\int_\alpha^a y^2\,dx.$$

74) Den Cubikinhalt einer Kugel zu berechnen.

$$V = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

75) Den Cubikinhalt eines Rotationsellipsoides zu finden, das entsteht, wenn sich eine Ellipse um ihre grosse Achse dreht.

$$V = \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

76) Der Inhalt eines parabolischen Zonenkörpers soll berechnet werden.

Sind x_1 und x_2 die Abscissen der Endpunkte des Parabelbogens, welcher die erzeugende Fläche begrenzt, so ist:

$$V = 2p\pi \int_{x_1}^{x_2} x\,dx = 2p\pi \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_2 - x_1).$$

77) Man soll den Inhalt des Körpers finden, der entsteht, wenn sich die Cycloidenfläche um die x-Achse (Gerade, auf der der erzeugende Kreis rollt) dreht.

$$V = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt = 8a^3\pi \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2}\,dt = 5a^3\pi^2.$$

78) Ein Kreisabschnitt, dessen Sehne $= 2s$ und dessen Halbmesser $= r$ ist, dreht sich um einen zur Sehne parallelen Durchmesser. Wie gross ist der Cubikinhalt des entstandenen Körpers?

$$\frac{1}{2} V = \pi \int_0^s (r^2 - x^2)\,dx - s\pi\,(r^2 - s^2).$$

$$V = \frac{4}{3} s^3\pi.$$

Brühl'sche Druckerei (Fr. Chr. Pietzsch) in Giessen.